



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

École Doctorale IAEM
Institut Élie Cartan de Lorraine
École Polytechnique

Thèse

Présentée et soutenue publiquement pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Mention : MATHÉMATIQUES

Robin RIBLET

Sous la direction d'Alain PLAGNE et Anne de ROTON

**Ensembles de petite somme et ensembles de Sidon,
Étude de deux extrêmes**

03/09/2021

Membres du jury :

Président du jury : M. Olivier RAMARÉ Directeur de recherche au CNRS, Université de Aix-Marseille

Directeurs de thèse : M. Alain PLAGNE Chercheur École Polytechnique, Palaiseau
Mme Anne de ROTON Maîtresse de conférence, Université de Lorraine, Nancy

Rapporteurs : M. Pablo CANDELA Assistant Professor, Université autonome de Madrid
M. François HENNECART Professeur, Université Jean Monnet, Saint-Étienne

Examineurs : M. Éric BALANDRAUD Maître de conférence, Université de Bordeaux
Mme Valérie BERTHÉ Directrice de recherche au CNRS, Université de Paris
Mme Cécile DARTYGE Maîtresse de conférence, Université de Lorraine, Nancy

Remerciements

En premier lieu, je voudrais remercier profondément mes deux directeurs de thèse Alain Plagne et Anne de Roton. Vous avez su me laisser la liberté dont j'avais besoin tout en m'accompagnant étroitement dans cette aventure. Votre bienveillance et votre enthousiasme m'ont énormément apporté tout au long de ces quatre années.

Je suis aussi très reconnaissant envers Pablo Candela et François Hennecart pour leurs rapports avisés et encourageants. Merci également à Éric Balandraud, Valérie Berthe, Cécile Dartyge et Olivier Ramaré d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Un merci particulier à Pablo pour m'avoir orienté vers des travaux de Cilleruelo et pour les échanges sympathiques qui en ont suivi. Éric, merci pour ta modestie et ton soutien à mon modeste sport de ballon. Cécile, en plus de faire partie de ce jury, merci pour tout ce que tu as fait pour moi chaque année au labo. Je sais que tu m'as beaucoup soutenu dans l'ombre comme énormément d'autres collègues.

Justement, je tiens à remercier toute l'équipe de l'Institut Élie Cartan de Lorraine. J'y ai trouvé une atmosphère particulièrement saine et travailler avec vous a été un vrai bonheur. Je ne peux pas énumérer tout le monde ici mais en vrac, merci à Alex, Anne, Bruno, Bruno, Clémence, Damien, Didier, Irène, Jean-François, Jean-François, Johann, Julien, Khalid, Olivier, Pierre-Adrien, Régine, Thomas, Youness,...

Enfin merci aux trois fantastiques : Élodie, Laurence et Paola. C'était incroyable de recevoir tant de bonne humeur alors que vous résolviez mes soucis.

Je voudrais également remercier toutes les personnes qui m'ont côtoyé de près et soutenu durant cette période. Tout d'abord mes coéquipiers et le SAS volley tout entier qui ont tous et toujours été très compréhensifs. Un clin d'œil spécial à mon coach Cesko. Ensuite tous les amis volleyeurs et autres qui ont pu croiser ma route. Spéciale dédicace à mes amichs : Bobo, Boulitch, Dimi, Fafi, Jerem, Jorsyjumper, Julio, Kramoun, Paulo, Pino et Toinou.

Enfin mes frérots : Batoune, Benflouf, Frodon, Gabi, Max, Mich, Pedro et tous mes Lorrains.

Pour finir, merci à ma grande famille et peut-être particulièrement à cette occasion aux plus matheux d'entre eux : Bb, Le Alain, Mich (encore), Papi, et Zico.

Merci à Marco (on est quitte).

Puis ma famille proche : Maman, Papa, ma petite sœur Fannu, mon petit koala et mon Baggio, certainement la personne à qui je dois le plus ici. Je n'imagine pas meilleur cadre pour m'épanouir. Merci.

Merci

Ensembles de petite somme et ensembles de Sidon,
étude de deux extrêmes

RIBLET Robin

Table des Matières

Introduction et état de l'art	6
Notations et conventions	14
I Ensembles de petite somme	17
Introduction et résultats	18
Début des preuves des théorèmes principaux	27
1 Mesures modulo le diamètre de B	28
1.1 $K_A = K$	32
1.1.1 $K_A \leq K$	32
1.1.2 $K_A \geq K$	32
1.2 Structures de A et B modulo D_B , premières informations	33
1.2.1 Presque-égalités et définition des erreurs ε_k^i	33
1.2.2 Lien entre ε_k^i et ε	34
1.2.3 Premières informations de structure	34
2 B modulo D_B est proche d'un intervalle	39
2.1 m_k ne dépend pas de k	39
2.1.1 Majoration de $\mu(J_k)$	39
2.1.2 Majoration de $\mu\left(\left(m_k^{-1}J_k\right) \Delta \left(m_l^{-1}J_l\right)\right)$	40
2.1.3 Minoration de $\mu\left(\left(m_k^{-1}J_k\right) \Delta \left(m_l^{-1}J_l\right)\right)$	41
2.2 Encadrement de la mesure de I_K	47
2.3 Preuve de $m = 1$	48
2.3.1 Premières informations et début de la stratégie	48
2.3.2 Minoration de $\lambda(B_M)$, $\#\mathcal{L}_B$ et $\#\mathcal{L}_A$	52
2.3.3 Preuve de $m = 1$ lorsque $m < \frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$	59
2.3.4 Le cas $m \geq \frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$ est impossible	60
3 Structure principale de A	64
3.1 Étape 0 : contribution de \tilde{A}_K dans A	65
3.2 Stratégie et Étape 1 : $k = K$	69

3.3	Étapes suivantes.	71
3.4	Conclusion : Structure principale de A	77
4	Structure totale de A	80
4.1	Stratégie et premiers résultats	80
4.2	Le cas des éléments de $A \setminus [\min A', \max A']$	87
4.3	Le cas des éléments de $A \setminus A'$ dans $[\min A', \max A']$	106
4.3.1	Le cas des éléments x de $A \setminus A'$ dans $] \max A'_k, \min A'_{k+1} [$ pour $k \in \{1, \dots, K - 2\}$	107
4.3.2	Le cas des éléments de A appartenant à $] \max A'_0, \min A'_1 [$ ou à $] \max A'_{K-2}, \min A'_{K-1} [$	110
	Conclusion des preuves des théorèmes 0.0.4, 0.0.6 et 0.0.7	116
4.4	Fin de la démonstration des théorèmes 0.0.6 et 0.0.4	117
4.5	Fin de la démonstration du théorème 0.0.7	117
II	Ensembles de Sidon	125
1	Ensembles de Sidon dans des dégénérescences de l'intervalle	128
1.1	Majoration du cardinal de l'ensemble de Sidon de taille maximale dans certaines dégénérescences de l'intervalle	129
1.2	Généralisation du théorème d'Abbott aux $B_2[g]$	136
1.3	Minoration du cardinal du Sidon maximal dans certaines dégénérescences de l'intervalle	144
2	Ensembles de Sidon et $B_2[2]$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket^d$ où $d \geq 3$	156
2.1	Tentatives et résultats partiels pour $d = 4$	157
2.2	Tentatives et résultats partiels pour $d = 3$	159
2.3	Construction de $B_2[g]$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket^d$ où $d \geq 2$	161
3	Ensembles infinis de Sidon de grande densité dans les entiers naturels	164

Introduction et état de l'art

Étant donnés deux ensembles A et B dans un semi-groupe additif, on définit leur somme comme étant l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme somme d'un élément de A et d'un élément de B

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

On obtient alors un nouvel ensemble et il est naturel de se questionner quant à la "taille" de ce nouvel ensemble. Nous utilisons ici le mot ambigu "taille" car cette notion peut prendre différents visages suivant le cadre dans lequel on étudie le problème. Il peut s'agir de la mesure de comptage si nous travaillons avec des ensembles finis d'entiers naturels par exemple, ou de la mesure de Lebesgue si nous travaillons avec des ensembles bornés de réels, ou il peut même être question de densité si nous travaillons avec des ensembles non bornés d'entiers. Cette "taille" de $A + B$ va évidemment dépendre des "tailles" de A et B mais aussi de leur structure. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons à deux cas extrêmes : les structures rendant $A + B$ le plus "gros" possible et celles le rendant le plus "petit" possible.

Plus précisément, pour le cas où $A + B$ est le plus "petit" possible, nous nous intéresserons aux ensembles bornés de réels et travaillerons donc avec la mesure de Lebesgue intérieure (notée λ). Étant donnés deux ensembles bornés de réels A et B , quelle est la mesure minimale que peut atteindre $A + B$? Il est bien connu (cf. [17] et [18]) que

$$\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + \lambda(B).$$

Cette inégalité est optimale car si A et B sont des intervalles on a égalité mais peut-on dire mieux si B n'est pas un intervalle par exemple, en particulier si $\lambda(B) < \text{diam}(B)$? Ruzsa [27] a répondu à cette question et a amélioré cette borne élémentaire en prouvant le théorème suivant.

Théorème 0.0.1 (Ruzsa). *Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés tels que $\lambda(B) \neq 0$. Soit D_B le diamètre de B , $K \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq \delta < 1$ tels que $\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta$. On a*

$$\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + \min(D_B, (K + \delta)\lambda(B)).$$

On sait que la minoration de ce théorème 0.0.1 est optimale. De plus, de Roton a étudié le cas d'égalité, lorsque

$$\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta)\lambda(B) < D_B + \lambda(A),$$

et a démontré qu'il n'y a essentiellement qu'une seule structure de A et B qui permet d'atteindre cette égalité (cf. [9]). Dans la première partie de ce travail, nous nous

intéresserons au voisinage de ce cas d'égalité, lorsque $\lambda(A+B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)\lambda(B)$, avec $\varepsilon > 0$ pas trop grand. Nous verrons que, si ε est suffisamment petit, et donc si la mesure de $A + B$ est suffisamment proche du cas d'égalité (de la minoration de Ruzsa), cela impose également des structures très strictes à A et B . Pour tout ensemble de réels E et tout réel $a > 0$, on note $(E \bmod a)$ la projection de E sur $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème A. *Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles fermés, bornés, de mesures non nulles et tels que $\lambda(B) \leq \lambda(A \bmod D_B)$, où D_B désigne le diamètre de B . On définit $K \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq \delta < 1$ par*

$$\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta.$$

Soit

$$\Gamma_K = K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - \log K - 13/2 + \log 4) + 8.$$

Si $\lambda(A+B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)\lambda(B)$ et $(K + \delta + (\Gamma_K + 3K/2 - 1)\varepsilon)\lambda(B) < D_B$ pour $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \min \left(\left(\frac{\delta}{3K} \right)^3, \frac{1 - \delta}{K^3 \log K}, \frac{3,1 \times 10^{-1549}}{K\lambda(B)} \right),$$

alors B est inclus dans un translaté de

$$B' = [0, b_+] \cup [D_B - b_-, D_B],$$

où $b_+, b_- \geq 0$ et $b_+ + b_- \leq \lambda(B)(1 + \varepsilon)$, et A est inclus dans un translaté de

$$A' = A_0 + [-\Gamma_K \varepsilon \lambda(B), \Gamma_K \varepsilon \lambda(B)],$$

où

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^K [(k-1)(D_B - b_-), (k-1)D_B + (K-k)b_+ + \delta\lambda(B)].$$

Remarque 0.0.2. *Notons que $\lambda(A_0) = \lambda(A)$ donc A' est un voisinage assez fin de A .*

Nous établirons également deux autres résultats (les deux théorèmes suivants), moins précis sur la structure de A mais demandant des hypothèses plus faibles.

Théorème B. *Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles fermés, bornés, de mesures non nulles et tels que $\lambda(B) \leq \lambda(A \bmod D_B)$, où D_B désigne le diamètre de B . Soient $K \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq \delta < 1$ définis par*

$$\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta.$$

Si

$$\lambda(A+B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)\lambda(B) < \lambda(A) + D_B - \varepsilon\lambda(B),$$

pour $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \min \left(\left(\frac{\delta}{3K} \right)^3, \frac{1 - \delta}{K^3 \log K}, \frac{3,1 \times 10^{-1549}}{K\lambda(B)} \right),$$

alors B est inclus dans un translaté de

$$B' = [0, b_+] \cup [D_B - b_-, D_B],$$

où $b_+, b_- \geq 0$ et $b_+ + b_- \leq \lambda(B)(1 + \varepsilon)$, et

$$\lambda(A \cap A_1) \geq \lambda(A) - \left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7) \right) \varepsilon \lambda(B),$$

où A_1 est un translaté de

$$A_0 + [0, K\varepsilon\lambda(B)],$$

où

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^K [(k-1)(D_B - b_-), (k-1)D_B + (K-k)b_+ + \delta\lambda(B)].$$

De plus, si l'une des deux conditions suivantes est réunie

- $(K + \delta + (\Gamma_K + 3K/2 - 1)\varepsilon)\lambda(B) < D_B$
- $\min(\lambda(B \cap [0, b_+]), \lambda(B \cap [D_B - b_-, D_B])) \geq \frac{\Gamma_K + K/2 - 1}{K - 1} \varepsilon \lambda(B)$

alors A est inclus dans

$$A_1 + [-(\Gamma_K - K/2)\varepsilon\lambda(B), (\Gamma_K - K/2)\varepsilon\lambda(B)],$$

où $\Gamma_K = K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - \log K - 13/2 + \log 4) + 8$.

Théorème C. Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles fermés, bornés, de mesures non nulles et tels que $\lambda(B) \leq \lambda(A \bmod D_B)$, où D_B désigne le diamètre de B . On pose $K \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq \delta < 1$ définis par

$$\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta.$$

Si

$$\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)\lambda(B) < \lambda(A) + D_B - \varepsilon\lambda(B),$$

pour

$$\varepsilon < \min \left(\left(\frac{\delta}{3K} \right)^3, \frac{1 - \delta}{K \log K + 3}, \frac{3,1 \times 10^{-1549}}{K\lambda(B)} \right),$$

alors B est inclus dans un translaté de

$$B' = [0, b_+] \cup [D_B - b_-, D_B],$$

où $b_+, b_- \geq 0$ et $b_+ + b_- \leq \lambda(B)(1 + \varepsilon)$, et A est inclus dans un translaté de

$$\left(A_0 + [-\Gamma_K \varepsilon \lambda(B), \Gamma_K \varepsilon \lambda(B)] \right) \cup U \cup V,$$

où

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^K [(k-1)(D_B - b_-), (k-1)D_B + (K-k)b_+ + \delta\lambda(B)],$$

$$\Gamma_K = K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - \log K - 13/2 + \log 4) + 8,$$

$$U = \begin{cases} [(K-1)b_+ \delta \lambda(B), D_B - b_-] & \text{si } b_+ > b_- \\ [(K-2)D_B + b_+ + \delta \lambda(B), (K-1)D_B - (K-1)b_-] & \text{si } b_+ < b_- \\ \emptyset & \text{si } b_+ = b_- \end{cases},$$

$$V_1 = [\lambda(B) - D_B - (\Gamma_K - K/2)\varepsilon \lambda(B), (K(\Gamma_K - K/2) + K + 1)\varepsilon \lambda(B) + \delta \lambda(B) - D_B]$$

$$V_2 = \max A'_0 + D_B + \left[-((K(\Gamma_K - K/2) + K + 1)\varepsilon - \delta)\lambda(B), ((\Gamma_K + 3K/2)\varepsilon - 1)\lambda(B) \right],$$

$$\text{et } V = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \min(\lambda(B \cap [0, b_+]), \lambda(B \cap [D_B - b_-, D_B])) > (\Gamma_K - K/2 - 1)\varepsilon \lambda(B) \\ V_1 & \text{si } \lambda(B \cap [0, b_+]) < (1 - (\Gamma_K - K/2 - 1)\varepsilon)\lambda(B) \\ V_2 & \text{si } \lambda(B \cap [D_B - b_-, D_B]) < (1 - (\Gamma_K - K/2 - 1)\varepsilon)\lambda(B) \end{cases}.$$

À l'opposé de ce premier cas d'étude, nous nous intéressons au second cas extrême, lorsque $A + B$ est très "gros". Nous étudierons le cas très particulier où $A = B$ et nous intéresserons donc à l'ensemble $A + A$ lorsque celui-ci est le plus gros possible. Nous nous placerons alors dans des cadres dénombrables comme les entiers naturels ou les corps finis et travaillerons donc essentiellement avec la notion de cardinal. Dans un tel cadre, $A + A$ est de "taille" maximale si toutes les sommes de deux éléments de A sont différentes. C'est à dire si A n'admet à l'équation

$$a + b = c + d,$$

que les solutions triviales :

$$\{a, b\} = \{c, d\}.$$

Un tel ensemble est appelé ensemble de Sidon, référence au mathématicien Simon Sidon, le premier à s'être intéressé à ces ensembles dans la littérature [30]. Il travaille alors sur la théorie des séries de Fourier et introduit plusieurs questions sur les ensembles de Sidon. Notamment la plus célèbre : quel est le cardinal maximal d'un ensemble de Sidon dans les n premiers entiers naturels ?

Si pour tout ensemble A d'un semi-groupe on note

$$F(A) = \max \{\#S \mid S \subseteq A, S \text{ est de Sidon}\},$$

alors la question se reformule en l'étude de $F(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Cette question a beaucoup été étudiée et maintenant il est bien connu que lorsque n grandit

$$F(\llbracket 1, n \rrbracket) \sim \sqrt{n}.$$

Mais qu'en est-il des autres structures que l'intervalle ? Que peut-on dire sur $F(A)$ quand A est un ensemble quelconque d'entiers naturels de cardinal n ? Quand A est une union de deux intervalles ? Une union finie d'intervalles ? Une progression arithmétique généralisée ?

Pour la majoration, on sait peu de choses actuellement en dehors de la structure de l'intervalle. Dans ce manuscrit, nous établirons des résultats pour des réunions finies d'intervalles et certaines progressions arithmétiques généralisées. Plus précisément nous montrerons les deux théorèmes suivants.

Théorème D. Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$, le cardinal de tout ensemble de Sidon inclus dans une union E de k intervalles disjoints de cardinal n ($\#E = n$) est majoré par

- i) $(\alpha + \sqrt{2 + \alpha^2})\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = \alpha \neq 0$
- ii) $\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ si $k = o(\sqrt{n})$
- iii) $\sqrt{n} + \sqrt{k}n^{1/4} + o(n^{1/4})$ si $k = o(n^{1/4})$.

Théorème E. Soit E une progression arithmétique généralisée

$$E = \{a_1 i_1 + \dots + a_k i_k \mid i_1 \in \{1, \dots, n_1\}, \dots, i_k \in \{1, \dots, n_k\}\}.$$

Alors si S est un ensemble de Sidon dans E , on a

$$\#S \leq a_1 \sqrt{\#E} + o(\sqrt{\#E}) \quad (\#E \rightarrow +\infty \text{ et } n_2 n_3 \dots n_k = o(n_1)).$$

La minoration de $F(A)$ en revanche a été étudiée et H.L. Abbott [1] a établi le résultat suivant. Si on pose

$$g(n) = \min \{F(A) \mid A \text{ est un ensemble d'entiers de cardinal } n\},$$

alors $g(n) > 0,0805\sqrt{n}$. Ce qui signifie que n'importe quel ensemble d'entiers de cardinal n contient un ensemble de Sidon de cardinal au moins $0,0805\sqrt{n}$ et donc

$$F(A) > 0,0805\sqrt{\#A}.$$

Ceci nous permet de donner des premières réponses à nos questions. En effet, si $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n_1, n_2)$ désigne l'ensemble de toutes les unions de deux intervalles de cardinal respectif n_1 et n_2 , le résultat d'Abbott assure que

$$\min \{F(A) \mid A \in \mathcal{A}(n_1, n_2)\} > 0,0805\sqrt{n_1 + n_2}.$$

Il est en fait possible de dire beaucoup mieux et dans ce manuscrit nous prouverons le théorème suivant.

Théorème F. Notons $\mathcal{A}(n_1, n_2)$ l'ensemble de toutes les unions de deux intervalles dans \mathbb{N} de cardinal respectif n_1 et n_2

$$\mathcal{A}(n_1, n_2) = \{I_1 \sqcup I_2 \mid I_1 \text{ et } I_2 \text{ sont des intervalles, } \#I_1 = n_1, \#I_2 = n_2\},$$

on a

$$\min \{F(A) \mid A \in \mathcal{A}(n_1, n_2)\} \gtrsim 0,8444\sqrt{n_1 + n_2}.$$

Ainsi si A est une union de deux intervalles, ce théorème assure que A contient un ensemble de Sidon de cardinal $0,8444\sqrt{\#A}$. Ce qui nous rapproche de la constante 1. D'autre part, notre théorème D assure qu'on ne peut pas dépasser 1. En fait, il assure même qu'on ne peut asymptotiquement pas dépasser 1 même si A est l'union de k intervalles, tant que k est un $o(\sqrt{\#A})$. C'est à partir d'un nombre d'intervalles de même ordre de grandeur que $\sqrt{\#A}$ qu'on ne parvient plus à garder la constante 1 devant l'asymptotique $\sqrt{\#A}$. Nous verrons qu'il est en fait impossible d'y parvenir et établirons le théorème suivant qui le prouve.

Théorème G. *Il existe une constante $c_0 > 0$ et une infinité d'entiers n pour lesquels il existe un ensemble de Sidon de cardinal n dans une union de $\frac{n-1}{2}$ intervalles de cardinal $n - c_0 \log n \log \log n$ chacun.*

Le théorème d'Abbott traite des ensembles de Sidon. C'est à dire des ensembles qui n'admettent qu'au plus une solution en $\{a, b\}$ à l'équation $a + b = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour un ensemble A , on appelle ensemble $B_2[g](A)$ tout sous-ensemble de A qui admet au plus g solutions en $\{a, b\}$ à l'équation $a + b = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier $B_2[1](A)$ est l'ensemble des ensembles de Sidon dans A . Dans ce manuscrit, nous démontrerons une généralisation des travaux d'Abbott aux ensembles $B_2[g]$, qui fera notamment l'objet du théorème suivant.

Théorème H. *Soit $g \geq 2$ un entier. On définit*

$$F(A)[g] = \max \{ \#B \mid B \in B_2[g](A) \}.$$

On a

$$\min \{ F(A)[g] \mid A \subset \mathbb{N}, \#A = n \} \geq 0,0402\lambda_g\sqrt{n} + o(\sqrt{n}),$$

$$\text{où } \lambda_2 = 1,5119 \text{ et } \lambda_g = \frac{g + \lfloor g/2 \rfloor}{\sqrt{g + 2 \lfloor g/2 \rfloor}} \text{ si } g \geq 3.$$

Au sujet des ensembles $B_2[g]$, nous étudierons également le cas des dimensions supérieures. Pour tous entiers $n, g, d \geq 1$, on pose

$$F_d^{[g]}(n) = F(\llbracket 1, n \rrbracket^d)[g] = \max \{ \#A \mid A \in B_2[g](\llbracket 1, n \rrbracket^d) \}.$$

Théorème I. *Soient n, d et g des entiers tels que $g \geq 3$ et $d \geq 2$. Posons $\lambda_g = \frac{g + \lfloor g/2 \rfloor}{\sqrt{g + 2 \lfloor g/2 \rfloor}}$. On a*

$$F_d^{[2]}(n) \gtrsim 1,5119n,$$

et si $g \geq 3$

$$F_d^{[g]}(n) \gtrsim \lambda_g n^{d/2}.$$

Enfin, nous nous intéresserons également à un dernier problème très célèbre à propos des ensembles de Sidon : la construction d'un ensemble de Sidon infini et de grande densité dans les entiers naturels. En 1998, I.Ruzsa [29] montre l'existence d'un ensemble de Sidon infini tel que le nombre de ses éléments dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ est $N^{\sqrt{2}-1+o(1)}$ pour N assez grand. D'autre part, Erdős [32] donne une majoration de cette densité en montrant que si A est un ensemble de Sidon infini, alors nécessairement

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log(N)} A(N)}{\sqrt{N}} \ll 1,$$

où $A(N) = \#(A \cap \llbracket 1, N \rrbracket)$. Ainsi, si on pose

$$\alpha = \sup \left\{ \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\log A(N)}{\log N} \mid A \subseteq \mathbb{N}^*, A \text{ est de Sidon} \right\},$$

ces deux résultats donnent $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Pour améliorer cet encadrement, on peut essayer d'augmenter la borne inférieure en construisant un ensemble infini de Sidon de densité N^β avec $\beta > \sqrt{2} - 1$. Malheureusement malgré de nombreuses tentatives, la constante de Ruzsa n'a pas pu être améliorée. L'obtention d'un tel résultat paraît donc très délicate. Dans la dernière partie de ce manuscrit, nous allons voir que la construction d'un tel ensemble infini est en fait équivalente à la donnée d'une infinité d'ensembles finis de Sidon $B_n \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ dont chaque troncature a le bon cardinal. C'est à dire tels que, pour tout $m \leq n$, on ait

$$\#(B_n \cap \llbracket 0, m \rrbracket) \geq m^\beta .$$

Plus précisément, nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème J. *L'existence d'un ensemble infini de Sidon A dans \mathbb{N} tel que pour tout entier m , $\#(A \cap \llbracket 1, m \rrbracket) \geq m^\beta$ où $\beta \in \left] 0, \frac{1}{2} \right]$ est équivalente à l'existence d'une sous-suite $(B_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles finis de Sidon tels que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $B_{\psi(n)} \subseteq \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket$ et $\#(B_{\psi(n)} \cap \llbracket 1, m \rrbracket) \geq m^\beta$ pour tout $m \leq \psi(n)$ (où ψ est une application strictement croissante sur \mathbb{N}).*

La force de ce résultat est qu'on est désormais amenés à travailler avec des ensembles finis qui peuvent n'avoir aucun lien entre eux. La structure d'un ensemble peut dépendre de sa taille, ce qui peut simplifier la construction et peut-être donner la première étape à une future amélioration du résultat de Ruzsa.

Notations et conventions

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{Z} celui des entiers relatifs et \mathbb{R} celui des réels.

Les deux parties de cette thèse sont indépendantes et auront chacune leurs notations et numérotation. Ainsi le théorème 1.0.1 ne sera pas le même dans la partie I et dans la partie II.

Notations Partie I

λ désigne la mesure de Lebesgue intérieure sur \mathbb{R} . On rappelle que si λ^* désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , alors pour tout ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$, on définit la mesure de Lebesgue intérieure de E par

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda^*(K) \mid K \subseteq E, K \text{ est compact} \}.$$

\mathbb{T} désigne le tore, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

μ désigne la mesure de Haar intérieure sur \mathbb{T} . De même on rappelle que si μ^* désigne la mesure de Haar sur \mathbb{T} , alors pour tout ensemble $E \subseteq \mathbb{T}$, on définit la mesure de Haar intérieure de E par

$$\mu(E) = \sup \{ \mu^*(K) \mid K \subseteq E, K \text{ est compact} \}.$$

On notera indifféremment d les distances usuelles sur \mathbb{R} et \mathbb{T} . On définit la distance entre deux ensembles E et F par

$$d(E, F) = \inf \{ d(e, f) \mid (e, f) \in E \times F \}.$$

Pour tout ensemble E et tout entier $n > 0$, on note

$$nE = \{ ne \mid e \in E \},$$

et $n.E$ la somme itérée n fois de l'ensemble E ,

$$n.E = E + \dots + E = \{ e_1 + e_2 + \dots + e_n \mid e_1, \dots, e_n \in E \}.$$

Pour tout entier positif k et tout sous-ensemble E de \mathbb{R}_+ on définit

$$\tilde{E}_k = \{ x \in [0, 1[\mid \# \{ n \in \mathbb{N} \mid n + x \in E \} \geq k \},$$

(c'est donc l'ensemble des éléments $x \in [0, 1[$ tels que le cardinal de $(x + \mathbb{N}) \cap E$ soit supérieur ou égal à k),

$$\dot{E}_k = \{ x \in [0, 1[\mid \# \{ n \in \mathbb{N} \mid n + x \in E \} = k \},$$

et $K_E = \sup \{k \in \mathbb{N} \mid \tilde{E}_k \neq \emptyset\}$. Ainsi

$$E = \bigsqcup_{k=1}^{K_E} \tilde{E}_k.$$

On notera π la projection de \mathbb{R} dans \mathbb{T}

$$\begin{aligned} \pi &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} \\ E &\longmapsto E \pmod{1} \end{aligned}$$

et π^{-1} la projection réciproque usuelle

$$\begin{aligned} \pi^{-1} &: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R} \\ F &\longmapsto F + \mathbb{N} \end{aligned}$$

Pour tout ensemble E dans \mathbb{R} on notera également π_E^{-1} la projection réciproque dans E

$$\begin{aligned} \pi_E^{-1} &: \mathbb{T} \longrightarrow E \\ F &\longmapsto (F + \mathbb{N}) \cap E \end{aligned}$$

On a

$$\pi_E^{-1}(F) = \{x \in E \mid x \pmod{1} \in F\}.$$

On note $\overline{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties bornées de \mathbb{R} et on définit la transformation χ sur \mathbb{R} par

$$\begin{aligned} \chi &: \overline{\mathcal{P}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathcal{P}}(\mathbb{R}) \\ E &\longmapsto \sup E - E \end{aligned}$$

Notations Partie II

Si p est un nombre premier, on note $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le groupe cyclique à p éléments.

On note \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers.

Pour tous entiers n et m , on note $\llbracket n, m \rrbracket$ l'ensemble de tous les entiers compris entre n et m .

Pour tout ensemble A , on notera indifféremment $\#A$ ou $|A|$ le cardinal de A .

Pour deux entiers a et b , on notera $a|b$ pour dire que a divise b et $a \nmid b$ pour dire que a ne divise pas b .

Pour tous entiers a, b et c , on écrira $a \equiv b \pmod{c}$ pour dire que a est congru à b modulo c (donc pour dire que les restes de a et b dans la division euclidienne par c sont les mêmes).

Pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor$ désignera la partie entière inférieure de x et $\lceil x \rceil$ désignera sa partie entière supérieure.

Enfin lorsqu'on aura fixé un groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, pour tout entier n , \bar{n} désignera la projection de n dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Partie I

Ensembles de petite somme

Introduction et résultats

Dans cette partie, nous nous intéressons aux ensembles dans \mathbb{R} bornés et plus précisément à la mesure de leur somme. Étant donnés deux ensembles de réels bornés non vides A et B , que peut-on dire sur $\lambda(A + B)$ en fonction de $\lambda(A)$ et $\lambda(B)$ (où λ est la mesure de Lebesgue intérieure sur \mathbb{R}) ?

Une première borne élémentaire bien connue (cf. [17]) est

$$\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + \lambda(B).$$

Cette inégalité est optimale car atteinte pour certains ensembles A et B (si ce sont des intervalles par exemple). En revanche, en toute généralité il est possible d'être plus précis en faisant intervenir le ratio $\lambda(A)/\lambda(B)$ et le diamètre de B . Dans toute cette partie I, A et B seront deux ensembles fermés bornés de mesures non nulles. On notera $D_B = \sup B - \inf B$ le diamètre de B et on désignera par (K, δ) l'unique couple défini par

$$\begin{cases} K \in \mathbb{N}^* \text{ et } 0 \leq \delta < 1 \\ \frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Remarque 0.0.1. Dans la définition de K et δ , $\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta$, on reconnaît le terme $\frac{K(K-1)}{2}$, la somme des $K - 1$ premiers entiers. En fait, on somme les premiers entiers jusqu'à dépasser $\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}$ et on appelle K le dernier entier ajouté de cette manière. Et $K\delta$ est l'excédent de $\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}$ sur la somme des $K - 1$ premiers entiers. K et δ sont ainsi uniquement déterminés.

Ruzsa [27] a démontré le théorème suivant.

Théorème 0.0.2 (Ruzsa). Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés non vides tels que $\lambda(B) \neq 0$. Notons D_B le diamètre de B et (K, δ) défini par (0.0.1). On a

$$\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + \min \left(D_B, (K + \delta)\lambda(B) \right).$$

La minoration du théorème 0.0.2 est également optimale et de Roton a étudié le cas d'égalité lorsque $\min \left(D_B, (K + \delta)\lambda(B) \right) = (K + \delta)\lambda(B)$, c'est à dire lorsque

$$(K + \delta)\lambda(B) < D_B.$$

Elle a démontré un théorème très précis de structure des ensembles critiques (cf. [9]).

Théorème 0.0.3 (de Roton). Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux fermés bornés tels que $\lambda(A), \lambda(B) \neq 0$. Notons D_B le diamètre de B et (K, δ) défini par (0.0.1). Si

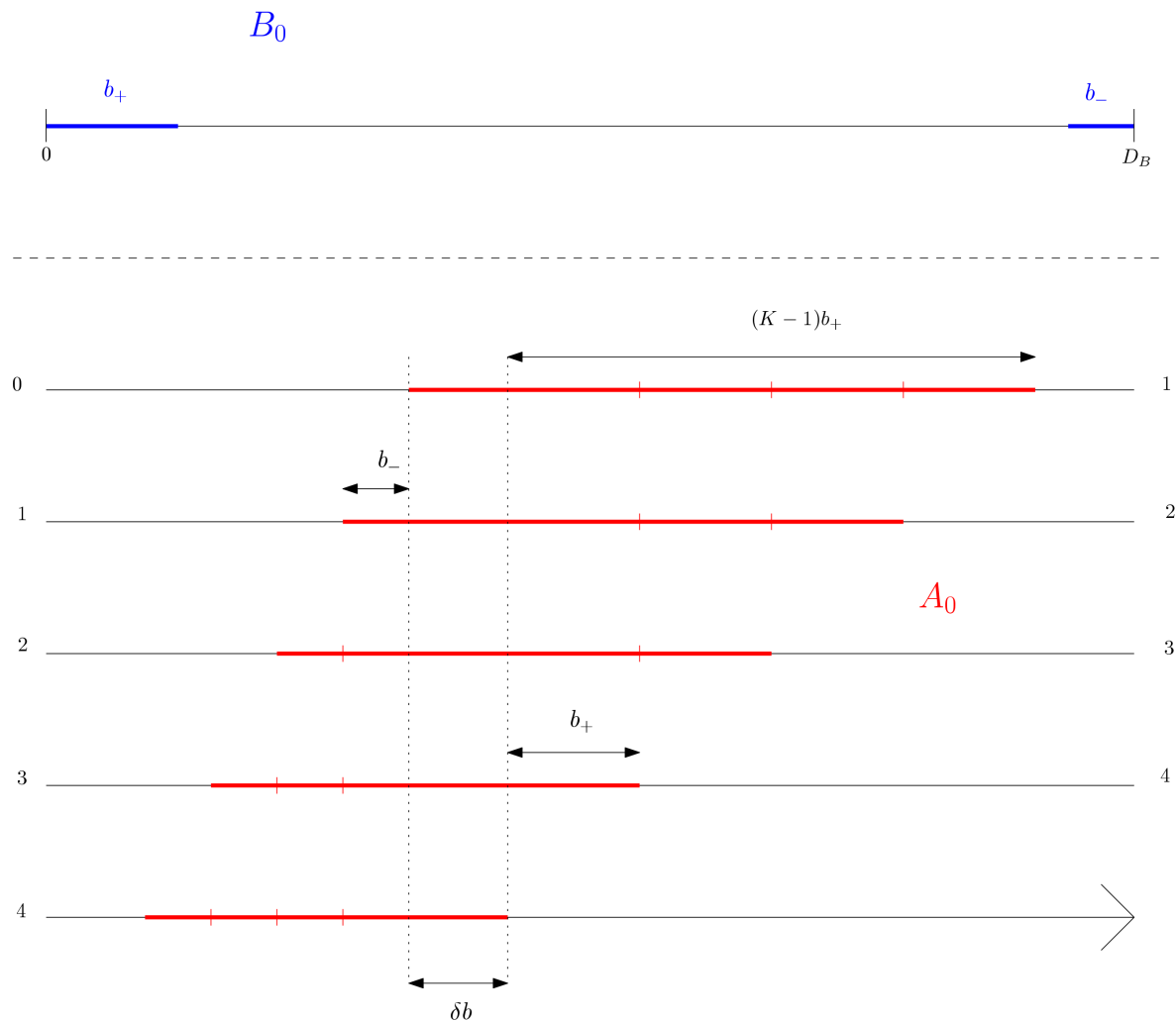
$$\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta) \lambda(B) < \lambda(A) + D_B,$$

alors A et B sont des translatés d'ensembles A' et B' de la forme

$$B_0 = [0, b_+] \cup [D_B - b_-, D_B],$$

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^K [(k-1)(D_B - b_-), (k-1)D_B + (K-k)b_+ + \delta\lambda(B)],$$

où $b_+, b_- \geq 0$ et $b_+ + b_- = \lambda(B)$.



Dans cette partie, nous nous intéresserons au voisinage de ce cas d'égalité, lorsque

$$\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon) \lambda(B),$$

pour un petit $\varepsilon > 0$. Nous verrons alors que, si ε est suffisamment petit, A et B sont inclus dans des translatés de voisinages de A_0 et B_0 respectivement (où A_0 et B_0 sont les ensembles définis dans le théorème 0.0.3). Ce résultat fait l'objet du théorème 0.0.4 ci-après.

Nous établirons également deux autres théorèmes (les théorèmes 0.0.6 et 0.0.7) dans lesquels nous affaiblirons les hypothèses sur ε mais qui fourniront donc naturellement des informations de structures moins précises sur A et B .

Théorème 0.0.4 (théorème A). *Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles fermés, bornés, de mesures non nulles et tels que $\lambda(B) \leq \lambda(A \bmod D_B)$, où D_B désigne le diamètre de B . Soit (K, δ) définis par (0.0.1) et soit*

$$\Gamma_K = K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - \log K - 13/2 + \log 4) + 8.$$

Si $\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)\lambda(B)$ et $(K + \delta + (\Gamma_K + 3K/2 - 1)\varepsilon)\lambda(B) < D_B$ pour $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \min \left(\left(\frac{\delta}{3K} \right)^3, \frac{1 - \delta}{K^3 \log K}, \frac{3,1 \times 10^{-1549}}{K\lambda(B)} \right),$$

alors B est inclus dans un translaté de

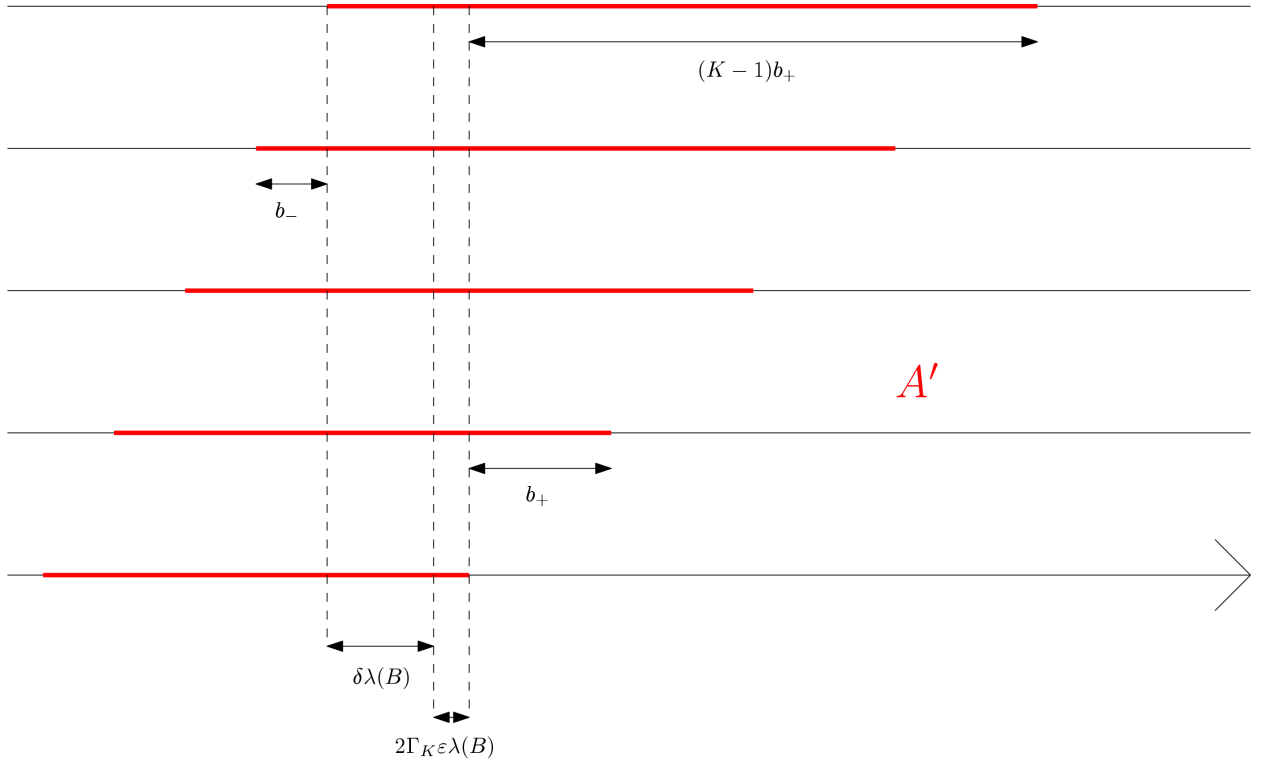
$$B' = [0, b_+] \cup [D_B - b_-, D_B],$$

où $b_+, b_- \geq 0$ et $b_+ + b_- \leq \lambda(B)(1 + \varepsilon)$, et A est inclus dans un translaté de

$$A' = A_0 + [-\Gamma_K \varepsilon \lambda(B), \Gamma_K \varepsilon \lambda(B)],$$

où

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^K [(k-1)(D_B - b_-), (k-1)D_B + (K-k)b_+ + \delta\lambda(B)].$$



Remarque 0.0.5. A est proche de A' car $A \subseteq a + A'$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ et par (0.0.1) on a

$$\lambda(A) = \left(\frac{K(K-1)}{2} + K\delta \right) \lambda(B),$$

d'où

$$\lambda(A \Delta (a + A')) = \lambda(A') - \lambda(A) \leq 2K\Gamma_K \varepsilon \lambda(B).$$

Bien sûr, B est également proche de B' car B est inclus dans un translaté de B' et

$$\lambda(B') - \lambda(B) \leq \varepsilon \lambda(B).$$

$$A \subset A'$$

Le théorème 0.0.4 est une conséquence du théorème plus général suivant.

Théorème 0.0.6 (théorème B). *Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles fermés, bornés, de mesures non nulles et tels que $\lambda(B) \leq \lambda(A \bmod D_B)$, où D_B désigne le diamètre de B . Soit (K, δ) l'unique couple défini par (0.0.1). Si*

$$\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon) \lambda(B) < \lambda(A) + D_B - \varepsilon \lambda(B),$$

pour $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \min \left(\left(\frac{\delta}{3K} \right)^3, \frac{1 - \delta}{K^3 \log K}, \frac{3,1 \times 10^{-1549}}{K \lambda(B)} \right),$$

alors B est inclus dans un translaté de

$$B' = [0, b_+] \cup [D_B - b_-, D_B],$$

où $b_+, b_- \geq 0$ et $b_+ + b_- \leq \lambda(B)(1 + \varepsilon)$, et

$$\lambda(A \cap A') \geq \lambda(A) - \left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7) \right) \varepsilon \lambda(B),$$

où A' est un translaté de

$$A_0 + [0, K\varepsilon \lambda(B)],$$

où

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^K [(k-1)(D_B - b_-), (k-1)D_B + (K-k)b_+ + \delta b].$$

De plus, si $\Gamma_K = K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - \log K - 13/2 + \log 4) + 8$ et si l'une des deux conditions suivantes est réunie

- $(K + \delta + (\Gamma_K + 3K/2 - 1)\varepsilon) \lambda(B) < D_B$

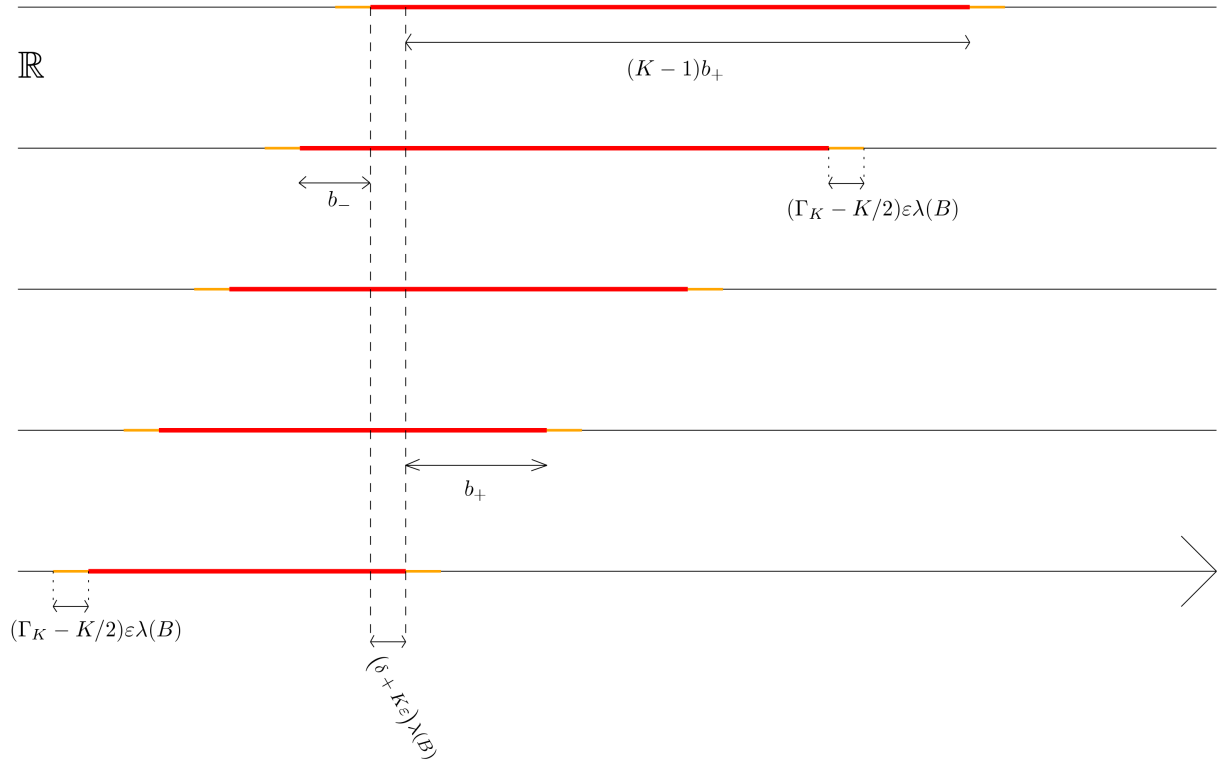
- $\min(\lambda(B \cap [0, b_+]), \lambda(B \cap [D_B - b_-, D_B])) \geq \frac{\Gamma_K + K/2 - 1}{K - 1} \varepsilon \lambda(B)$

alors A est inclus dans

$$A' + [-(\Gamma_K - K/2)\varepsilon\lambda(B), (\Gamma_K - K/2)\varepsilon\lambda(B)].$$

Ce théorème 0.0.6 fournit un peu plus d'informations sur A . Il donne une structure principale (A') bien plus précise pour la majorité des éléments de A et affirme que peu d'éléments peuvent s'éloigner de cette structure principale.

$$A \subseteq A' + [-(\Gamma_K - K/2)\varepsilon\lambda(B), (\Gamma_K - K/2)\varepsilon\lambda(B)]$$



$$\text{avec } \Gamma_K = K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - \log K - 13/2 + \log 4) + 8$$

Dans ce théorème 0.0.6, nous pouvons affaiblir l'hypothèse $\varepsilon < \frac{1 - \delta}{K^3 \log K}$ en $\varepsilon < \frac{1 - \delta}{K \log K + 3}$, cela ne change pas la structure principale de A , la grande majorité de ses éléments se trouvera toujours dans A' mais quelques autres éléments peuvent "s'échapper" un peu plus loin, ce qui affaiblit l'inclusion finale de A . De même, si nous ne demandons plus que l'une ou l'autre des deux conditions

- $(K + \delta + (\Gamma_K + 3K/2 - 1)\varepsilon)\lambda(B) < D_B$
- $\min(\lambda(B \cap [0, b_+]), \lambda(B \cap [D_B - b_-, D_B])) \geq \frac{\Gamma_K + K/2 - 1}{K - 1} \varepsilon \lambda(B)$

soit respectée, nous avons tout de même un résultat d'inclusion pour A tout entier mais bien moins précis que celui du théorème 0.0.4. C'est le théorème suivant.

Théorème 0.0.7 (théorème C). *Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles fermés, bornés, de mesures non nulles et tels que $\lambda(B) \leq \lambda(A \bmod D_B)$, où D_B désigne le diamètre de B . Soit (K, δ) l'unique couple défini par (0.0.1). Si*

$$\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon) \lambda(B) < \lambda(A) + D_B - \varepsilon \lambda(B),$$

pour

$$\varepsilon < \min \left(\left(\frac{\delta}{3K} \right)^3, \frac{1 - \delta}{K \log K + 3}, \frac{3,1 \times 10^{-1549}}{K \lambda(B)} \right),$$

alors B est inclus dans un translaté de

$$B' = [0, b_+] \cup [D_B - b_-, D_B],$$

où $b_+, b_- \geq 0$ et $b_+ + b_- \leq \lambda(B)(1 + \varepsilon)$, et A est inclus dans un translaté de

$$\left(A_0 + [-\Gamma_K \varepsilon \lambda(B), \Gamma_K \varepsilon \lambda(B)] \right) \cup U \cup V,$$

où

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^K [(k-1)(D_B - b_-), (k-1)D_B + (K-k)b_+ + \delta \lambda(B)],$$

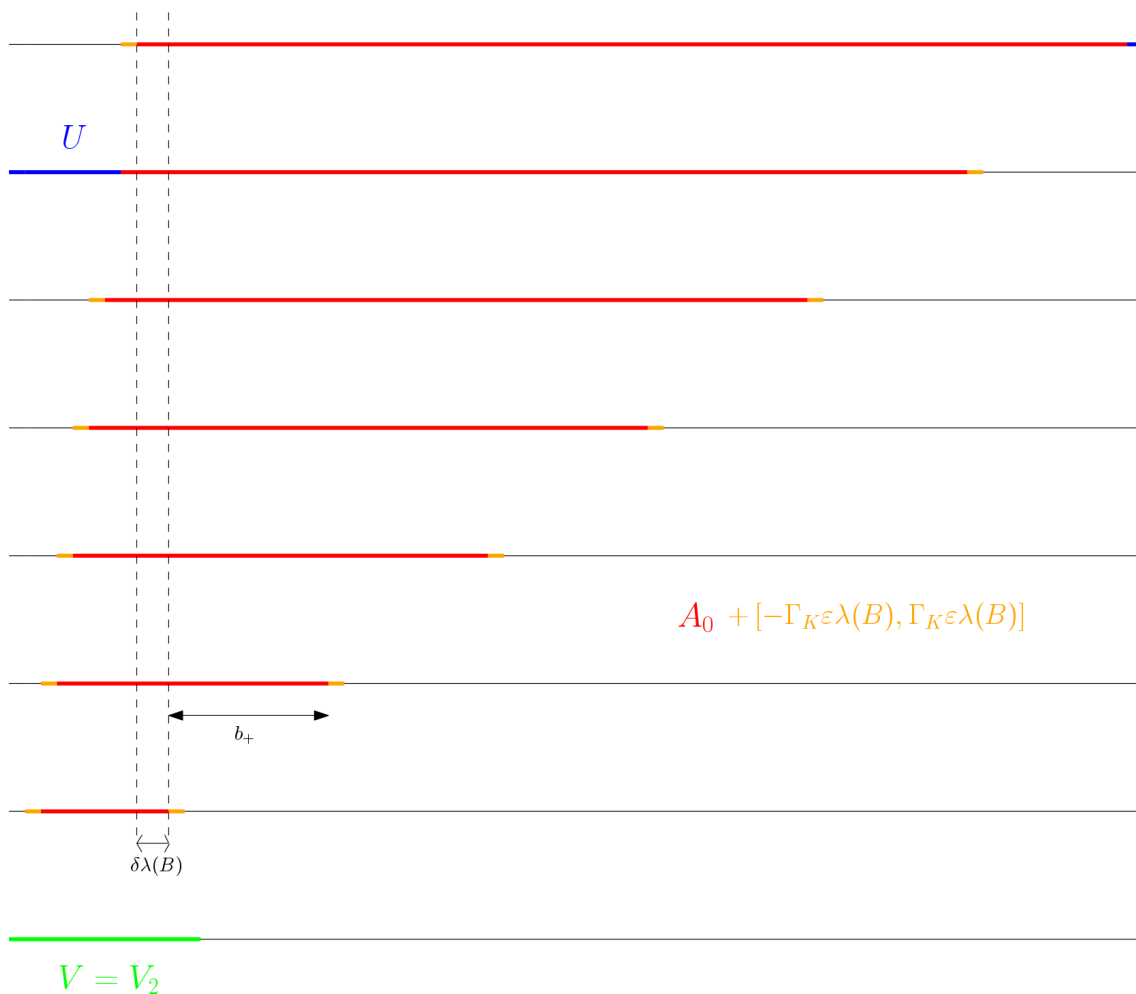
$$\Gamma_K = K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - \log K - 13/2 + \log 4) + 8,$$

$$U = \begin{cases} [(K-1)b_+ \delta \lambda(B), D_B - b_-] & \text{si } b_+ > b_- \\ [(K-2)D_B + b_+ + \delta \lambda(B), (K-1)D_B - (K-1)b_-] & \text{si } b_+ < b_- \\ \emptyset & \text{si } b_+ = b_- \end{cases},$$

$$V_1 = [\lambda(B) - D_B - (\Gamma_K - K/2)\varepsilon \lambda(B), (K(\Gamma_K - K/2) + K + 1)\varepsilon \lambda(B) + \delta \lambda(B) - D_B]$$

$$V_2 = \max A'_0 + D_B + \left[-((K(\Gamma_K - K/2) + K + 1)\varepsilon - \delta)\lambda(B), ((\Gamma_K + 3K/2)\varepsilon - 1)\lambda(B) \right],$$

$$\text{et } V = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \min(\lambda(B \cap [0, b_+]), \lambda(B \cap [D_B - b_-, D_B])) > (\Gamma_K - K/2 - 1)\varepsilon \lambda(B) \\ V_1 & \text{si } \lambda(B \cap [0, b_+]) < (1 - (\Gamma_K - K/2 - 1)\varepsilon)\lambda(B) \\ V_2 & \text{si } \lambda(B \cap [D_B - b_-, D_B]) < (1 - (\Gamma_K - K/2 - 1)\varepsilon)\lambda(B) \end{cases}.$$



Remarque 0.0.8. La condition $\varepsilon < \frac{1 - \delta}{K \log K + 3}$ provient en fait des conditions $\varepsilon < \frac{1 - \delta}{K \log K}$ si $K \geq 3$, $\varepsilon < \frac{1 - \delta}{2(2 - \log 2)}$ si $K = 2$ et $\varepsilon < \frac{1 - \delta}{K + 2 + 1/K}$. Nous avons opté pour plus de lisibilité.

La borne $\varepsilon \leq \frac{3,1 \times 10^{-1549}}{\lambda(B)}$, dans ces trois théorèmes, provient d'un théorème de Candela et de Roton [4] (théorème 0.0.9 ci-après) dont nous allons nous servir dans ce travail, et qui généralise le théorème de Kneser [18] sur les ensembles critiques dans le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On note μ la mesure de Haar intérieure sur le tore \mathbb{T} ($\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) et pour tout ensemble E et tout scalaire n , on pose

$$nE = \{ne \mid e \in E\}.$$

Théorème 0.0.9 (Candela et de Roton). Soit $\rho \in [0, c]$ où $c = 3,1 \times 10^{-1549}$. Soient $A, B \subset \mathbb{T}$ satisfaisant

$$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B) + \rho < \frac{1}{2} (\mu(A) + \mu(B) + 1),$$

et $\rho < \mu(B) \leq \mu(A)$. Alors il existe trois intervalles $I, J, K \subseteq \mathbb{T}$, avec I, J fermés et K ouvert, et un entier naturel n non nul tels que $nA \subseteq I$, $nB \subseteq J$, $K \subseteq n(A + B)$, et $\mu(I) \leq \mu(A) + \rho$, $\mu(J) \leq \mu(B) + \rho$, $\mu(K) \geq \mu(A) + \mu(B)$.

Toute amélioration de la borne $c = 3,1 \times 10^{-1549}$ améliorera automatiquement le domaine de validité de notre résultat. Dans le théorème 0.0.9, cette borne est due à un résultat dans \mathbb{Z}_p (le corps fini à p éléments) de Gryniewicz. Afin que notre preuve s'adapte à d'éventuelles futures améliorations de cette borne, nous travaillerons avec un seuil théorique ρ_0 . Au moment de parution de cette thèse, ce seuil vaut donc $3,1 \times 10^{-1549}$ mais on conjecture qu'il peut atteindre 1. On conjecture donc que le théorème 0.0.9 peut en fait être vérifié quel que soit $\rho \in [0, 1[$, ce qui affaiblirait donc automatiquement les hypothèses des théorèmes 0.0.4, 0.0.6 et 0.0.7.

Remarque 0.0.10. *Dans les théorèmes 0.0.4, 0.0.6 et 0.0.7 nous avons supposé A et B fermés mais on peut aisément obtenir les résultats correspondant lorsque A et B sont seulement Lebesgue-mesurables. En effet, si A et B sont seulement Lebesgue-mesurables (mais toujours bornés et de mesures non nulles), alors il nous suffit de choisir des ensembles fermés $A_n \subseteq A$ et $B_n \subseteq B$ tels que $\lambda(A_n) \rightarrow \lambda(A)$, $\lambda(B_n) \rightarrow \lambda(B)$ et $D_{B_n} \rightarrow D_B$, puis de leurs appliquer nos résultats.*

La suite de cette partie consiste principalement en la preuve des théorèmes 0.0.4, 0.0.6 et 0.0.7. On terminera avec quelques exemples.

Preuve des théorèmes principaux

La démonstration reprend les idées et la structure de la preuve développée par de Roton dans le cas d'égalité [9]. Ainsi notre preuve comportera principalement trois étapes. La première consistera à utiliser l'inégalité de Ruzsa et le théorème de structure 0.0.9 afin de montrer que nos ensembles sont proches de réunions d'intervalles sur lesquels on a des informations. La deuxième à prouver que B est finalement proche de l'union de deux intervalles seulement, et la troisième permettra de dégager la structure de A . Dans le cas d'égalité, les sous-ensembles sont des intervalles (ou des sous-ensembles de mesure complète dans un intervalle), alors que nous avons des "erreurs", les sous-ensembles ne remplissent pas entièrement les intervalles et il pourra y avoir des décalages, ce qui complique chaque étape et ajoute des contraintes. Notamment pour la dernière étape, il nous faudra établir la structure de A en deux temps. Tout d'abord, nous dégagerons la structure principale de A , qui contient la grande majorité des éléments de A , puis nous finirons par exhiber des informations sur le reste des éléments de A et ainsi compléterons la description de la structure de A .

Le théorème 0.0.4 est un corollaire direct du théorème 0.0.6 et nous allons donc simplement démontrer les théorèmes 0.0.6 et 0.0.7. La différence entre ces deux théorèmes réside simplement dans le choix des hypothèses. Elles sont bien plus faibles dans le théorème 0.0.7 que dans le théorème 0.0.6. Le résultat du théorème 0.0.7 est donc naturellement plus faible également. Cependant seule la toute dernière partie, consacrée à la structure totale de A , va être concernée par les changements. Ainsi nous nous placerons sous les hypothèses du théorème 0.0.7 afin d'en donner la démonstration. Puis nous rajouterons simplement les deux hypothèses supplémentaires nécessaires au théorème 0.0.6 lors des lemmes 4.2.5 et 4.3.4 pour préciser la dernière étape et démontrer le théorème 0.0.6.

Tout au long de notre démonstration, nous aurons besoin de contraintes sur ε . Celles-ci seront toutes contenues dans les hypothèses des théorèmes 0.0.4, 0.0.6 et 0.0.7. Cependant afin de faciliter de futures améliorations de ces hypothèses, à la fin de chaque étape où nous aurons besoin d'une contrainte sur ε , nous noterons en bleu à droite, la contrainte exacte que demande cette étape.

Étape 1

Mesures modulo le diamètre de B

Posons $\rho_0 = 3,1 \times 10^{-1549}$. Soient A et B deux ensembles fermés, bornés, de réels, de mesures non nulles. Notons $D_B = \sup B - \inf B$ le diamètre de B et soient $K \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq \delta < 1$ tels que

$$\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta. \quad (1.0.1)$$

On suppose que

$$\lambda(A+B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)\lambda(B) < \lambda(A) + D_B - \varepsilon\lambda(B),$$

où ε est un réel positif tel que

$$\varepsilon < \min \left(\left(\frac{\delta}{3K} \right)^3, \frac{1-\delta}{K \log K + 3}, \frac{3,1 \times 10^{-1549}}{K\lambda(B)} \right).$$

Pour simplifier l'utilisation de cette hypothèse tout au long de la démonstration, nous allons la décomposer en trois hypothèses distinctes :

$$\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K} \right)^3, \quad (1.0.2)$$

$$\varepsilon < \frac{1-\delta}{K \log K + 3}, \quad (1.0.3)$$

$$\varepsilon < \frac{\rho_0}{K\lambda(B)}. \quad (1.0.4)$$

En translatant et normalisant, on peut supposer que $0 = \min B$, $D_B = 1$ et donc

$$\lambda(A+B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)\lambda(B) < \lambda(A) + 1 - \varepsilon\lambda(B),$$

ce qui entraîne

$$(K + \delta + 2\varepsilon)\lambda(B) < 1. \quad (1.0.5)$$

Quitte à translater A , on peut supposer également que $\min A \in [0, 1[$. On pourrait supposer que $\min A = 0$ mais en fait, nous verrons plus tard qu'il est plus aisé de faire en sorte que A soit suffisamment loin de 0 (cf. (2.1.7)).

Remarque 1.0.1. Notons que K est nécessairement supérieur ou égal à 2 car $\lambda(A) \geq \lambda(B)$ par hypothèse. En effet, comme $\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta$, si $K = 1$ on a

$$\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \delta < 1,$$

ce qui contredit $\lambda(A) \geq \lambda(B)$.

Pour tout entier positif k et tout sous-ensemble E de \mathbb{R}_+ on définit

$$\tilde{E}_k = \{x \in [0, 1[\mid \#\{n \in \mathbb{N} \mid n + x \in E\} \geq k\},$$

(c'est donc l'ensemble des éléments $x \in [0, 1[$ tels que le cardinal de $(x + \mathbb{N}) \cap E$ soit supérieur ou égal à k), et $K_E = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid \tilde{E}_k \neq \emptyset\}$. Notons que $\tilde{E}_{k+1} \subseteq \tilde{E}_k$ et $\tilde{E}_1 = \pi(E)$, où π désigne la projection de \mathbb{R} dans \mathbb{T}

$$\begin{aligned} \pi &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} \\ E &\longmapsto E \pmod{1}. \end{aligned}$$

Posons $S = A + B$. Remarquons enfin que K_A peut également être défini par

$$K_A = \max\{\#\{a \in A \mid y \equiv a \pmod{1}\}, y \in [0, 1[\}.$$

Tout au long de la preuve du théorème 0.0.4, nous allons utiliser la décomposition de E en \tilde{E}_k et plus précisément le lemme suivant.

Lemme 1.0.2. Soit $E \subset \mathbb{R}_+$ un ensemble borné. On a

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{K_E} \mu(\tilde{E}_k).$$

Preuve. On a

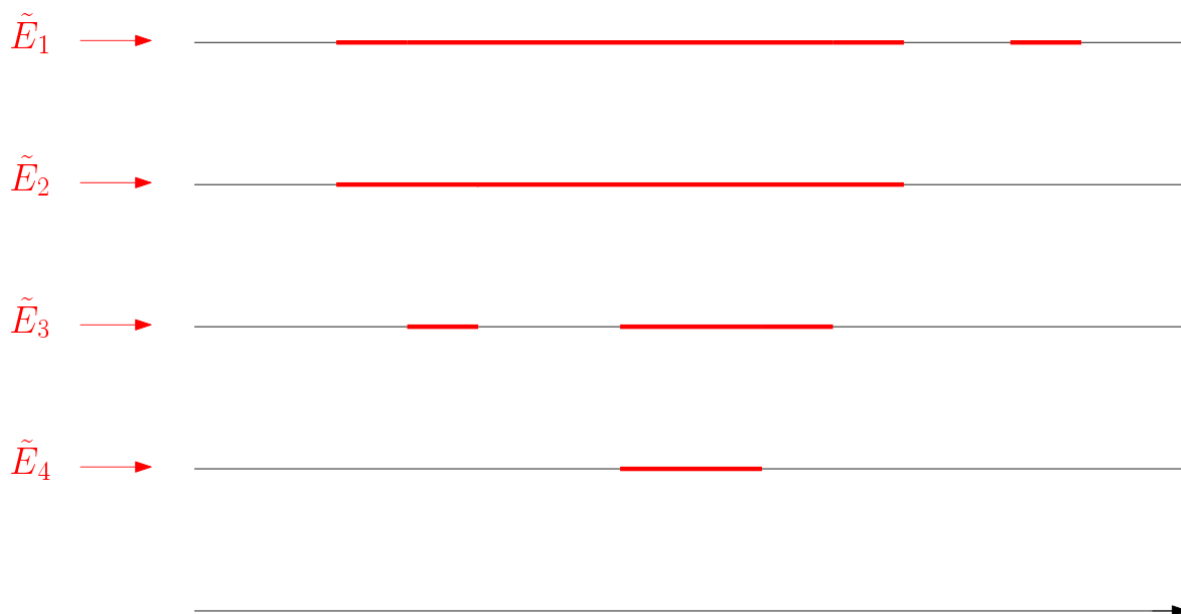
$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \int_0^1 \mathbb{1}_E(x) \, dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_i^{i+1} \mathbb{1}_E(x) \, dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^1 \mathbb{1}_E(x+i) \, dx \\ &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{1}_E(x+i) \, dx \quad (\text{la somme est finie car } E \text{ est borné}) \\ &= \int_0^1 \#\{i \in \mathbb{N} \mid x+i \in E\} \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{K_E} k \lambda(\{x \in [0, 1[\mid \#\{i \in \mathbb{N} \mid x+i \in E\} = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{K_E} \lambda(\{x \in [0, 1[\mid \#\{i \in \mathbb{N} \mid x+i \in E\} \geq k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{K_E} \mu(\tilde{E}_k). \end{aligned}$$

□

Pour bien comprendre cette égalité, on peut par exemple examiner la structure de E en décomposant \mathbb{R} comme une union d'étages, le i -ème étage étant l'intervalle $[i - 1, i[$.



Puis en remontant les éléments à l'étage libre le plus haut (c'est à dire l'étage compris entre les deux entiers naturels consécutifs les plus petits possible), l'égalité devient claire.



Cette idée est très utile dans ce genre de résultat où l'on s'intéresse à des structures de petite somme. Car pour que la mesure soit petite, il faut qu'il y ait un maximum de superpositions d'ensembles (que les morceaux, une fois sommés, donnent plusieurs fois les mêmes ensembles, comme c'est le cas pour les progressions arithmétiques d'intervalles). En regardant la mesure de nos ensembles de cette manière, nous pouvons comprendre et analyser ces structures.

Ruzsa (cf. [27] ou le lemme 1 dans [9]) a utilisé ce procédé afin de prouver le lemme suivant.

Lemme 1.0.3 (Ruzsa). *Si $\lambda(A + B) < \lambda(A) + 1$, on a*

$$\lambda(A + B) \geq \frac{K_A + 1}{K_A} \lambda(A) + \frac{K_A + 1}{2} \lambda(B).$$

Preuve. On rappelle qu'on a posé $S = A + B$. Comme $0, 1 \in B$, on a $\tilde{A}_{k-1} \subset \tilde{S}_k$ pour $k \geq 2$ et donc

$$\mu(\tilde{A}_{k-1}) \leq \mu(\tilde{S}_k) \quad (k \geq 2). \quad (1.0.6)$$

Ainsi

$$\lambda(A + B) = \sum_{k=1}^{K_S} \mu(\tilde{S}_k) \geq \sum_{k=1}^{K_A} \mu(\tilde{A}_k) + \mu(\tilde{S}_1) = \lambda(A) + \mu(\tilde{S}_1).$$

Par le théorème de Raikov [26] soit $\mu(\tilde{S}_1) = 1$ et $\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + 1 = \lambda(A) + D_B$, soit pour $k \geq 1$, on a $\mu(\tilde{S}_k) \leq \mu(\tilde{S}_1) < 1$ et

$$\mu(\tilde{S}_k) \geq \mu(\tilde{A}_k) + \mu(B) \quad (k \leq K_A). \quad (1.0.7)$$

Or si $\mu(\tilde{S}_1) = 1$ on a donc $\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + 1$ mais d'autre part, par hypothèse puis par (1.0.5) on a

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)\lambda(B) \\ &< \lambda(A) + 1 - \varepsilon\lambda(B), \end{aligned}$$

et donc nécessairement $\mu(\tilde{S}_1) < 1$. Ainsi en combinant (1.0.6) et (1.0.7), on obtient

$$\mu(\tilde{S}_k) \geq \frac{k-1}{K_A} \mu(\tilde{A}_{k-1}) + \frac{K_A - k + 1}{K_A} (\mu(\tilde{A}_k) + \mu(B)) \quad (1 \leq k \leq K_A + 1),$$

et finalement

$$\lambda(A + B) \geq \frac{K_A + 1}{K_A} \lambda(A) + \frac{K_A + 1}{2} \lambda(B).$$

□

Remarque 1.0.4. *Comme $D_B = 1$, on utilisera indifféremment $\lambda(B)$ et $\mu(B)$ pour désigner la mesure de B . On pose*

$$b = \lambda(B) = \mu(B).$$

Nous sommes désormais prêts à entamer la première étape. Commençons par montrer que si $\varepsilon < \delta/(K-1)$ et $\varepsilon < 1 - \delta$ alors $K_A = K$ où K est défini par (1.0.1).

1.1 $K_A = K$

Nous allons procéder par double inégalité.

1.1.1 $K_A \leq K$

Tout d'abord, une des deux inégalités est presque immédiate. En effet, on a

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) = \lambda(S) &= \sum_{k=1}^{K_S} \mu(\tilde{S}_k) \geq \sum_{k=1}^{K_A} \mu(\tilde{S}_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{K_A} (\mu(\tilde{A}_k) + b) \\ &\geq \lambda(A) + K_A b, \end{aligned}$$

d'où $K_A \leq K + \delta + \varepsilon$. Or par l'hypothèse (1.0.2) on a $\varepsilon < 1 - \delta$ et donc

$$K_A \leq K. \quad (1.1.1)$$

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < 1 - \delta$.

Pour l'autre inégalité, il faut travailler un peu plus.

1.1.2 $K_A \geq K$

Supposons par l'absurde $K_A \leq K - 1$. On a, d'une part, par hypothèse et par (1.0.1)

$$\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)b = \frac{K+1}{K}\lambda(A) + \frac{K+1}{2}b + \varepsilon b,$$

et d'autre part, la minoration du lemme 1.0.3 de Ruzsa. Ainsi

$$\frac{K+1}{K}\lambda(A) + \frac{K+1}{2}b + \varepsilon b \geq \frac{K_A+1}{K_A}\lambda(A) + \frac{K_A+1}{2}b.$$

Or

$$\begin{aligned} &\frac{K+1}{K}\lambda(A) + \frac{K+1}{2}b + \varepsilon b \geq \frac{K_A+1}{K_A}\lambda(A) + \frac{K_A+1}{2}b \\ \Leftrightarrow \varepsilon &\geq \frac{K_A+1}{K_A} \frac{\lambda(A)}{b} + \frac{K_A+1}{2} - \frac{K+1}{K} \frac{\lambda(A)}{b} - \frac{K+1}{2} \\ \Leftrightarrow \varepsilon &\geq \frac{\lambda(A)}{b} \left(\frac{1}{K_A} - \frac{1}{K} \right) + \frac{K_A - K}{2} \\ \Leftrightarrow \varepsilon &\geq (K - K_A) \left(\frac{\lambda(A)}{b} \frac{1}{KK_A} - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon &\geq (K - K_A) \left(\left(\frac{K(K-1)}{2} + \delta K \right) \frac{1}{KK_A} - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon &\geq \frac{K - K_A}{2K_A} (K - K_A - 1 + 2\delta). \end{aligned}$$

Et comme on a supposé $K_A \leq K - 1$, ceci implique

$$\varepsilon \geq \frac{\delta}{K_A} \geq \frac{\delta}{K},$$

ce qui est absurde car cela contredit l'hypothèse (1.0.2). Donc $K_A > K - 1$ et donc

$$K_A = K. \quad (1.1.2)$$

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{\delta}{K-1}$.

Cette première égalité va nous permettre, en reprenant la preuve du lemme 1.0.3 de Ruzsa en remplaçant K_A par K , d'obtenir des contrôles sur les inégalités entre les mesures d'ensembles modulo D_B . Ainsi nous saurons que ces inégalités sont proches du cas d'égalité, ce qui nous permettra d'utiliser le théorème 0.0.9 et ainsi obtenir des informations de structure modulo D_B sur nos ensembles.

1.2 Structures de A et B modulo D_B , premières informations

1.2.1 Presque-égalités et définition des erreurs ε_k^i

Par l'hypothèse (1.0.1) et d'après (1.1.2), on a

$$\frac{K_A + 1}{K_A} \lambda(A) + \frac{K_A + 1}{2} b = \lambda(A) + (K + \delta)b,$$

ce qui implique que les 3 inégalités

$$\begin{cases} \mu(\tilde{S}_k) \geq \mu(\tilde{A}_{k-1}) & (2 \leq k \leq K_A + 1) \\ \mu(\tilde{S}_k) \geq \mu(\tilde{A}_k) + \mu(B) & (1 \leq k \leq K_A) \\ \mu(\tilde{S}_k) \geq 0 & (k \geq K_A + 2) \end{cases}$$

qu'utilise Ruzsa dans la preuve de son lemme sont en fait presque des égalités. En effet en posant

$$\begin{cases} \mu(\tilde{S}_k) = \mu(\tilde{A}_{k-1}) + \varepsilon_k^1 b & (2 \leq k \leq K + 1) \\ \mu(\tilde{S}_k) = \mu(\tilde{A}_k) + \mu(B) + \varepsilon_k^2 b & (1 \leq k \leq K) \\ \mu(\tilde{S}_k) = \varepsilon_k^3 b & (k \geq K + 2) \end{cases},$$

avec $\varepsilon_k^i \geq 0$ pour tout i et k , et en reprenant la preuve du lemme 1.0.3, on a

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \sum_{k=1}^{K_S} \mu(\tilde{S}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{K+1} \left[\frac{k-1}{K_A} \left(\mu(\tilde{A}_{k-1}) + \varepsilon_k^1 b \right) + \frac{K_A - k + 1}{K_A} \left(\mu(\tilde{A}_k) + b + \varepsilon_k^2 b \right) \right] + \sum_{k=K+2}^{K_S} \varepsilon_k^3 b \\ &= \frac{K_A + 1}{K_A} \lambda(A) + \frac{K_A + 1}{2} b + \left[\sum_{k \geq K+2} \varepsilon_k^3 + \sum_{k=0}^K \frac{k}{K} \left(\varepsilon_{k+1}^1 + \varepsilon_{K+1-k}^2 \right) \right] b \\ &= \lambda(A) + (K + \delta)b + \left[\sum_{k \geq K+2} \varepsilon_k^3 + \sum_{k=0}^K \frac{k}{K} \left(\varepsilon_{k+1}^1 + \varepsilon_{K+1-k}^2 \right) \right] b. \end{aligned}$$

Et donc nécessairement

$$\varepsilon = \sum_{k \geq K+2} \varepsilon_k^3 + \sum_{k=0}^K (k/K) (\varepsilon_{k+1}^1 + \varepsilon_{K+1-k}^2).$$

Ainsi on a

$$\begin{cases} \mu(\tilde{S}_k) = \mu(\tilde{A}_{k-1}) + \varepsilon_k^1 b & (2 \leq k \leq K+1) \\ \mu(\tilde{S}_k) = \mu(\tilde{A}_k) + \mu(B) + \varepsilon_k^2 b & (1 \leq k \leq K) \\ \mu(\tilde{S}_k) = \varepsilon_k^3 b & (k \geq K+2) \end{cases}, \quad (1.2.1)$$

où $\varepsilon_k^i \geq 0$ pour tout i, k et

$$\varepsilon = \sum_{k \geq K+2} \varepsilon_k^3 + \sum_{k=0}^K \frac{k}{K} (\varepsilon_{k+1}^1 + \varepsilon_{K+1-k}^2).$$

1.2.2 Lien entre ε_k^i et ε

Rappelons que

$$\varepsilon = \sum_{k \geq K+2} \varepsilon_k^3 + \sum_{k=0}^K \frac{k}{K} (\varepsilon_{k+1}^1 + \varepsilon_{K+1-k}^2). \quad (1.2.2)$$

Cela implique en particulier

$$\sum_{k \geq K+2} \varepsilon_k^3 \leq \varepsilon \quad (1.2.3)$$

et donc pour tout $k \geq K+2$

$$\mu(\tilde{S}_k) = \varepsilon_k^3 b \leq \varepsilon b. \quad (1.2.4)$$

Pour tout $k \in \{2, \dots, K+1\}$, on a également

$$\varepsilon_k^1 \leq \frac{K}{k-1} \varepsilon \quad (1.2.5)$$

et pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ on a

$$\varepsilon_k^2 \leq \frac{K}{K+1-k} \varepsilon. \quad (1.2.6)$$

Enfin plus brutalement, on a aussi

$$\varepsilon_k^i \leq K\varepsilon \leq K \frac{\rho_0}{Kb} \leq \frac{\rho_0}{b}, \quad (1.2.7)$$

où la deuxième inégalité provient de l'hypothèse (1.0.4).

1.2.3 Premières informations de structure

Comme pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, $\tilde{A}_k + B \subseteq \tilde{S}_k$, on a d'après la deuxième ligne de (1.2.1)

$$\mu(\tilde{A}_k + B) \leq \mu(\tilde{S}_k) \leq \mu(\tilde{A}_k) + b + \varepsilon_k^2 b.$$

Comme $\mu(\tilde{A}_k + B)$ est proche de $\mu(\tilde{A}_k) + b$, on souhaite appliquer le théorème 0.0.9. Pour cela il nous faut vérifier trois conditions.

- Il faut tout d'abord que $\varepsilon_k^2 b$ (qui va jouer le rôle de ρ dans le théorème 0.0.9) soit inférieur à $\rho_0 = 3,1 \times 10^{-1549}$.
- Ensuite il faut que $\mu(\tilde{A}_k) + b + \varepsilon_k^2 b$ soit inférieur strictement à $\frac{1}{2} (\mu(\tilde{A}_k) + b + 1)$.
- Enfin il faut qu'on ait $\varepsilon_k^2 b < \min(b, \mu(\tilde{A}_k))$.

Nous allons donc commencer par vérifier que ces trois conditions sont bien remplies sous nos hypothèses.

• **Première condition :**

D'après (1.2.7) et par l'hypothèse (1.0.4), pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, on a $\varepsilon_k^2 \leq \frac{\rho_0}{b}$, donc

$$\varepsilon_k^2 b \leq \rho_0,$$

et donc nous respectons la première condition du théorème 0.0.9.

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{\rho_0}{Kb}$.

• **Deuxième condition :**

Commençons par énoncer un lemme qui donne la mesure exacte de \tilde{A}_K .

Lemme 1.2.1. *On a*

$$\mu(\tilde{A}_K) = \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k (\varepsilon_{k+1}^1 - \varepsilon_{k+1}^2) b.$$

Preuve. D'après (1.2.1), on a pour tout $k = 2, \dots, K$

$$\mu(\tilde{A}_{k-1}) + \varepsilon_k^1 b = \mu(\tilde{S}_k) = \mu(\tilde{A}_k) + b + \varepsilon_k^2 b,$$

donc

$$\mu(\tilde{A}_{k-1}) = \mu(\tilde{A}_k) + b + \varepsilon_k^2 b - \varepsilon_k^1 b,$$

d'où en itérant,

$$\mu(\tilde{A}_k) = \mu(\tilde{A}_K) + (K - k)b + \sum_{i=k+1}^K (\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i^1) b.$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \sum_{k=1}^K \mu(\tilde{A}_k) \\ &= \sum_{k=1}^K \left[\mu(\tilde{A}_K) + (K - k)b + \sum_{i=k+1}^K (\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i^1) b \right] \\ &= K\mu(\tilde{A}_K) + \frac{K(K-1)}{2}b + \sum_{k=1}^{K-1} k (\varepsilon_{k+1}^2 - \varepsilon_{k+1}^1) b, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{A}_K) &= \frac{\lambda(A)}{K} - \frac{K-1}{2}b - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k (\varepsilon_{k+1}^2 - \varepsilon_{k+1}^1) b \\ &= \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k (\varepsilon_{k+1}^1 - \varepsilon_{k+1}^2) b.\end{aligned}$$

□

La deuxième condition est équivalente à

$$\mu(\tilde{A}_k) + b + 2\varepsilon_k^2 b < 1,$$

pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$. Rappelons que par (1.2.1), pour tout $k \in \{1, \dots, K-1\}$, on a

$$\mu(\tilde{A}_k) = \mu(\tilde{S}_{k+1}) - \varepsilon_{k+1}^1 b = \mu(\tilde{A}_{k+1}) + b + \varepsilon_{k+1}^2 b - \varepsilon_{k+1}^1 b,$$

d'où en itérant,

$$\mu(\tilde{A}_k) = \mu(\tilde{A}_K) + (K-k)b + \sum_{i=k+1}^K (\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i^1) b.$$

Ainsi, par le lemme 1.2.1, on a

$$\mu(\tilde{A}_k) + b + 2\varepsilon_k^2 b = \delta b + (K-k+1)b + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K-1} i (\varepsilon_{i+1}^1 - \varepsilon_{i+1}^2) b + \sum_{i=k+1}^K (\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i^1) b + 2\varepsilon_k^2 b.$$

En utilisant (1.2.2) à la première inégalité ci-dessous, on obtient

$$\begin{aligned}& \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K-1} i (\varepsilon_{i+1}^1 - \varepsilon_{i+1}^2) + \sum_{i=k+1}^K (\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i^1) + 2\varepsilon_k^2 \\ &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K i (\varepsilon_{i+1}^1 + \varepsilon_{K+1-i}^2) - \varepsilon_{K+1}^1 - \sum_{i=1}^K \frac{i}{K} \varepsilon_{K+1-i}^2 - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{i}{K} \varepsilon_{i+1}^2 \\ & \quad + \sum_{i=k+1}^K \varepsilon_i^2 - \sum_{i=k+1}^K \varepsilon_i^1 + 2\varepsilon_k^2 \\ &\leq \varepsilon - \sum_{i=k+1}^{K+1} \varepsilon_i^1 - \sum_{i=1}^K \frac{i}{K} \varepsilon_{K+1-i}^2 + \sum_{i=1}^{K-1} \left(1 - \frac{i}{K}\right) \varepsilon_{i+1}^2 - \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_{i+1}^2 + 2\varepsilon_k^2 \\ &\leq \varepsilon - \sum_{i=k+1}^{K+1} \varepsilon_i^1 - \sum_{i=1}^K \frac{i}{K} \varepsilon_{K+1-i}^2 + \sum_{j=1}^{K-1} \frac{j}{K} \varepsilon_{K+1-j}^2 - \sum_{i=1}^{k-2} \varepsilon_{i+1}^2 + \varepsilon_k^2 \\ &\leq \varepsilon - \sum_{i=k+1}^{K+1} \varepsilon_i^1 - \varepsilon_1^2 - \sum_{i=1}^{k-2} \varepsilon_{i+1}^2 + \varepsilon_k^2 \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon_k^2.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mu(\tilde{A}_k) + b + 2\varepsilon_k^2 b \leq \delta b + (K-k+1)b + \varepsilon b + \varepsilon_k^2 b.$$

Il nous suffit alors de différencier les cas $k = 1$ et $k \geq 2$ pour conclure.

Si $k \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{A}_k) + b + 2\varepsilon_k^2 b &\leq \delta b + (K - k + 1)b + \varepsilon b + \varepsilon_k^2 b \\ &\leq (K + \delta + \varepsilon)b + (\varepsilon_k^2 - 1)b \\ &< (K + \delta + \varepsilon)b,\end{aligned}$$

car $\varepsilon \geq \frac{\varepsilon_k^2}{K}$ et $\varepsilon < \frac{1}{K}$. Ainsi par (1.0.5)

$$\mu(\tilde{A}_k) + b + 2\varepsilon_k^2 b \leq (K + \delta + \varepsilon)b < 1.$$

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{K}$.

Si $k = 1$, on a

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{A}_1) + b + 2\varepsilon_1^2 b &\leq (K + \delta + \varepsilon)b + \varepsilon_1^2 b \\ &\leq (K + \delta + \varepsilon)b + \varepsilon b,\end{aligned}$$

où la deuxième ligne est obtenue en appliquant (1.2.6) pour $k = 1$. Finalement, $(K + \delta + \varepsilon)b + \varepsilon b < 1$ toujours par l'hypothèse (1.0.5) et donc la deuxième condition est vérifiée également.

Notons que nous venons d'établir l'inégalité

$$\mu(\tilde{A}_1) + \varepsilon_1^2 b < 1 - b - \varepsilon_1^2 b. \quad (1.2.8)$$

• **Troisième condition :**

Il s'agit de vérifier qu'on a bien $\varepsilon_k^2 b < \min(b, \mu(\tilde{A}_k))$ pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$. Tout d'abord, par inclusion, on a $\mu(\tilde{A}_k) \geq \mu(\tilde{A}_K)$, quel que soit $k \in \{1, \dots, K\}$. Ainsi, par le lemme 1.2.1, il suffit de montrer que l'on a

$$\varepsilon_k^2 b < \min\left(b, \delta b + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K-1} i (\varepsilon_{i+1}^1 - \varepsilon_{i+1}^2) b\right).$$

Premièrement, par (1.2.6), on a $\varepsilon_k^2 \leq K\varepsilon$. De plus par l'hypothèse (1.0.2), $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K}\right)^3$ donc en particulier $\varepsilon < \frac{1}{K}$ et donc $\varepsilon_k^2 b < b$.

Deuxièmement,

$$\delta b + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K-1} i (\varepsilon_{i+1}^1 - \varepsilon_{i+1}^2) b \geq \delta b - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K-1} i \varepsilon_{i+1}^2 b,$$

et $\varepsilon_k^2 b < \delta b - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K-1} i \varepsilon_{i+1}^2 b$ car d'après (1.2.6)

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^2 + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K-1} i \varepsilon_{i+1}^2 &\leq K\varepsilon + \sum_{i=1}^{K-1} i\varepsilon \leq K\varepsilon + \frac{K(K-1)}{2}\varepsilon \\ &\leq \frac{K(K+1)}{2}\varepsilon < \delta, \end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue par l'hypothèse (1.0.2).

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{2\delta}{K(K+1)}$.

Finalement les trois conditions sont vérifiées et nous pouvons utiliser le théorème.

• **Utilisation du théorème 0.0.9 :**

Les trois conditions étant remplies, nous pouvons appliquer le théorème 0.0.9 et ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, il existe un entier $m_k > 0$ et deux intervalles I_k et J_k dans \mathbb{T} tels que $m_k \tilde{A}_k \subseteq I_k$, $m_k B \subseteq J_k$ avec

$$\begin{cases} \mu(I_k) \leq \mu(\tilde{A}_k) + \varepsilon_k^2 b \\ \mu(J_k) \leq b + \varepsilon_k^2 b \end{cases} .$$

Dans la suite, nous allons montrer que $m_k = 1$ quel que soit k . Ainsi nous obtiendrons automatiquement des informations de structure très précises sur B . En effet, si $m_k = 1$ alors $B \subseteq J_k$, et donc B est contenu dans un intervalle de \mathbb{T} qu'il remplit presque.

Étape 2

B modulo D_B est proche d'un intervalle

Comme annoncé dans la partie précédente, nous allons montrer que $m_k = 1$ quel que soit k . Pour cela, commençons par prouver que m_k ne dépend pas de k . C'est à dire, montrons que $m_{k'} = m_k$ pour tout k et k' .

2.1 m_k ne dépend pas de k

L'essentiel de cette partie consiste à prouver le lemme suivant, qui reprend les dernières informations obtenues grâce au théorème 0.0.9 auxquelles on a ajouté l'information que m_k ne dépend pas de k (c'est à dire qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $m_k = m$ pour tout k).

Lemme 2.1.1. *Il existe un entier $m > 0$ tel que pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ on ait $m\tilde{A}_k \subseteq I_k$, $mB \subseteq J_k$ où I_k et J_k sont des intervalles tels que*

$$\begin{cases} \mu(I_k) \leq \mu(\tilde{A}_k) + \varepsilon_k^2 b \\ \mu(J_k) \leq \mu(B) + \varepsilon_k^2 b \end{cases}.$$

Preuve. On rappelle que $K \geq 2$ (cf. la remarque 1.0.1). Il s'agit de prouver que $m_k = m_l$ pour tout $k, l \in \{1, \dots, K\}$. Commençons par démontrer que $\mu(J_k) < 1/2$.

2.1.1 Majoration de $\mu(J_k)$

Lemme 2.1.2. *Pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, on a $\mu(J_k) < 1/2$.*

Preuve. Soit $k \in \{1, \dots, K\}$, on a $m_k B \subseteq J_k$ avec $\mu(J_k) \leq b + \varepsilon_k^2 b$. Par (1.2.6) puis par (1.0.5), on a

$$\begin{aligned} \mu(J_k) &\leq b + \varepsilon_k^2 b \leq (1 + K\varepsilon)b \\ &< \frac{1 + K\varepsilon}{K + \delta + 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

De plus si $\varepsilon < \delta/2$, alors

$$\frac{1 + K\varepsilon}{K + \delta + 2\varepsilon} < \frac{1 + K\varepsilon}{K + 4\varepsilon} \leq \frac{1}{2},$$

car $K \geq 2$ (cf. remarque 1.0.1). Donc finalement $\mu(J_k) < 1/2$.

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$.

□

On va supposer qu'il existe des entiers k et l tels que m_k et m_l sont différents et on va s'intéresser à $(m_k^{-1}J_k) \Delta (m_l^{-1}J_l)$ afin de trouver une absurdité.

2.1.2 Majoration de $\mu((m_k^{-1}J_k) \Delta (m_l^{-1}J_l))$

On sait que $m_k B \subseteq J_k$ et $m_l B \subseteq J_l$ avec

$$\begin{cases} \mu(J_k) \leq \mu(B) + \varepsilon_k^2 b \\ \mu(J_l) \leq \mu(B) + \varepsilon_l^2 b \end{cases},$$

où m_k et m_l sont des entiers positifs. Nous allons utiliser le fait que $m_k^{-1}J_k$ et $m_l^{-1}J_l$ contiennent tous deux B . Commençons par une simple remarque : si $n \in \mathbb{N}^*$ et E est un sous-ensemble de \mathbb{T} , alors $\mu(n^{-1}E) = \mu(E)$. En effet

$$n^{-1}E = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \left(i + \left\{ \frac{x}{n} \mid x \in E \right\} \right),$$

et donc

$$\mu(n^{-1}E) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu\left(\left\{ \frac{x}{n} \mid x \in E \right\}\right) = \frac{n}{n} \mu(E) = \mu(E).$$

Comme $m_k^{-1}J_k$ et $m_l^{-1}J_l$ contiennent tous deux B , on a

$$\mu(m_k^{-1}J_k \cap m_l^{-1}J_l) \geq b,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu((m_k^{-1}J_k) \Delta (m_l^{-1}J_l)) &= \mu((m_k^{-1}J_k) \setminus (m_l^{-1}J_l)) + \mu((m_l^{-1}J_l) \setminus (m_k^{-1}J_k)) \\ &= \mu(m_k^{-1}J_k) - \mu(m_k^{-1}J_k \cap m_l^{-1}J_l) + \mu(m_l^{-1}J_l) \\ &\quad - \mu(m_k^{-1}J_k \cap m_l^{-1}J_l) \\ &\leq \mu(m_k^{-1}J_k) + \mu(m_l^{-1}J_l) - 2b \\ &\leq \mu(J_k) + \mu(J_l) - 2b \\ &\leq \varepsilon_k^2 b + \varepsilon_l^2 b. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mu((m_k^{-1}J_k) \Delta (m_l^{-1}J_l)) \leq \varepsilon_k^2 b + \varepsilon_l^2 b. \quad (2.1.1)$$

Par ailleurs, nous montrerons que si m_k et m_l sont différents alors nécessairement $(m_k^{-1}J_k) \Delta (m_l^{-1}J_l)$ est de grande mesure, ce qui conduira à une absurdité.

2.1.3 Minoration de $\mu\left((m_k^{-1}J_k) \Delta (m_l^{-1}J_l)\right)$

Cette étape est plus difficile que la précédente. L'obtention de la minoration nécessitera plusieurs étapes. Commençons par quelques définitions.

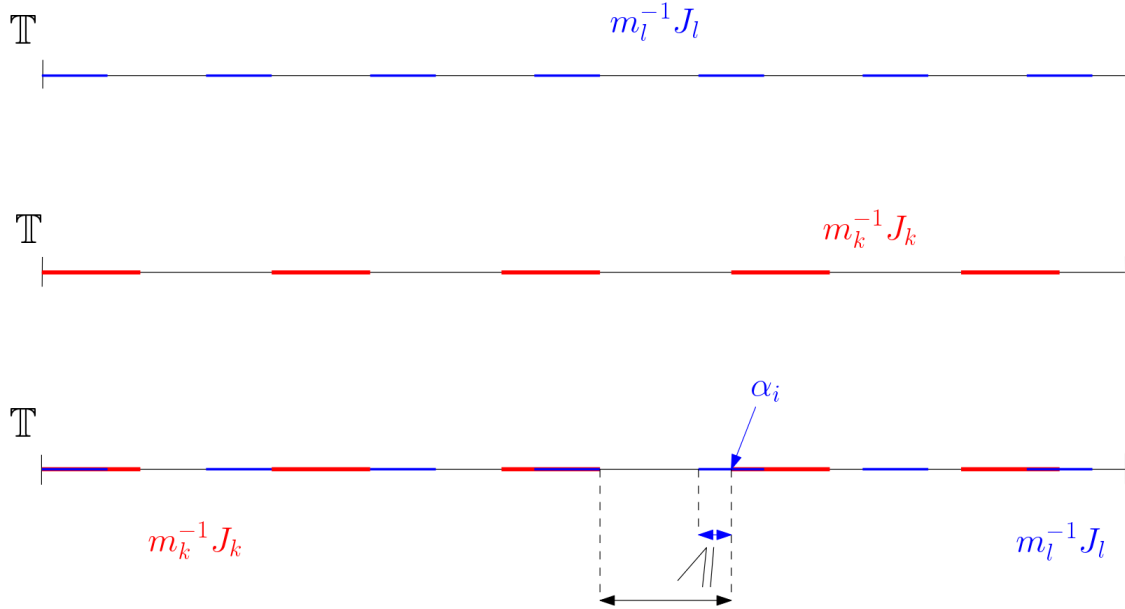
Supposons, sans perdre en généralité, que $m_k < m_l$. Dans \mathbb{T} , $m_l^{-1}J_l$ est composé de m_l intervalles de taille $\mu(J_l)/m_l$ uniformément espacés. Appelons $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l}$ les centres de ces intervalles. Comme ils sont uniformément espacés, on a $|\alpha_i - \alpha_j| \geq 1/m_l$ quels que soient $i, j \in \{1, \dots, m_l\}$ si $i \neq j$.

De même, $m_k^{-1}J_k$ est composé de m_k intervalles de taille $\mu(J_k)/m_k$. Appelons les $\{J_k^i\}_{i=1}^{m_k}$. Nous allons commencer par montrer qu'il y a des centres dans $m_k^{-1}J_k$ et d'autres dans $\mathbb{T} \setminus (m_k^{-1}J_k)$.

2.1.3.i Affirmation 1 : $m_k^{-1}J_k$ contient nécessairement des α_i .

Supposons par l'absurde que $m_k^{-1}J_k \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l} = \emptyset$, c'est à dire qu'aucun centre n'appartient à $m_k^{-1}J_k$. Notons qu'un intervalle de $m_l^{-1}J_l$ dont le centre n'appartient pas à $m_k^{-1}J_k$ a nécessairement au moins l'une de ses extrémités en dehors de $m_k^{-1}J_k$ également. En effet, $\mathbb{T} \setminus (m_k^{-1}J_k)$ est composé d'intervalles de taille $\frac{1-\mu(J_k)}{m_k}$ et comme $\mu(J_k), \mu(J_l) < 1/2$, on a

$$\frac{1 - \mu(J_k)}{m_k} > \frac{1}{2m_k} > \frac{\mu(J_l)}{m_k} > \frac{\mu(J_l)}{m_l}.$$



Ainsi chaque intervalle de $m_l^{-1}J_l$ dont le centre n'appartient pas à $m_k^{-1}J_k$ a au moins une de ses moitiés dans $m_l^{-1}J_l \setminus m_k^{-1}J_k$. Et comme on a supposé $m_k^{-1}J_k \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l} = \emptyset$,

c'est le cas de tous les intervalles composant $m_l^{-1}J_l$, et ainsi

$$\mu\left(\left(m_k^{-1}J_k\right) \Delta \left(m_l^{-1}J_l\right)\right) \geq \mu\left(m_l^{-1}J_l\right) / 2 \geq b/2,$$

ce qui contredit (2.1.1) car $\varepsilon_k^2 + \varepsilon_l^2 \leq 2K\varepsilon < 1/2$. Ainsi $m_k^{-1}J_k \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l} \neq \emptyset$.

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{4K}$.

2.1.3.ii Affirmation 2 : $\mathbb{T} \setminus \left(m_k^{-1}J_k\right)$ contient nécessairement des α_i

Supposons par l'absurde que $\left(\mathbb{T} \setminus \left(m_k^{-1}J_k\right)\right) \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l} = \emptyset$. Comme les centres $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l}$ forment une progression arithmétique de pas $1/m_l$, cela implique que les intervalles de $\mathbb{T} \setminus \left(m_k^{-1}J_k\right)$ sont de taille au plus $1/m_l$. Cependant $\mu(J_k) \leq 1/2$, donc

$$\frac{\mu(J_k)}{m_k} \leq \frac{1 - \mu(J_k)}{m_k} \leq \frac{1}{m_l},$$

et donc chaque intervalle J_k^j contient au plus un centre α_i . C'est à dire $\#\left\{J_k^j \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l}\right\} \leq 1$ pour tout $j = 1, \dots, m_k$. Ainsi comme $\left(\mathbb{T} \setminus \left(m_k^{-1}J_k\right)\right) \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l} = \emptyset$, on a

$$m_l = \sum_{j=1}^{m_k} \#\left\{J_k^j \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l}\right\} \leq \sum_{j=1}^{m_k} 1 = m_k,$$

ce qui contredit $m_k < m_l$. Nous sommes à présent assurés qu'il existe des centres dans $m_k^{-1}J_k$ et d'autres dans $\mathbb{T} \setminus \left(m_k^{-1}J_k\right)$.

La stratégie que nous adoptons consiste à montrer que de nombreux centres α_i des intervalles composant $m_l^{-1}J_l$ se trouvent dans $\mathbb{T} \setminus \left(m_k^{-1}J_k\right)$.

Commençons par renuméroter les $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l}$. Comme on a à la fois $m_k^{-1}J_k \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l} \neq \emptyset$ et $\left(\mathbb{T} \setminus \left(m_k^{-1}J_k\right)\right) \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l} \neq \emptyset$, quitte à renuméroter les $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l}$ et les $\{J_k^i\}_{i=1}^{m_k}$, on peut supposer que $\alpha_1 \in J_k^1$ et que $\alpha_{m_l} \notin J_k^{m_k}$. Appelons n_1 le plus petit indice tel que $\alpha_{n_1+1} \notin m_k^{-1}J_k$, puis n_2 le plus petit indice tel que $\alpha_{n_1+n_2+1} \in m_k^{-1}J_k$, n_3 le plus petit indice tel que $\alpha_{n_1+n_2+n_3+1} \notin m_k^{-1}J_k$, n_4 le plus petit indice tel que $\alpha_{n_1+\dots+n_4+1} \in m_k^{-1}J_k$, ... etc, jusque n_M le plus petit indice tel que $\alpha_{n_1+\dots+n_M} = \alpha_{m_l}$ (M est nécessairement pair de par notre renumérotation et trivialement $M \leq m_l$). On a ainsi

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1} \in m_k^{-1}J_k$$

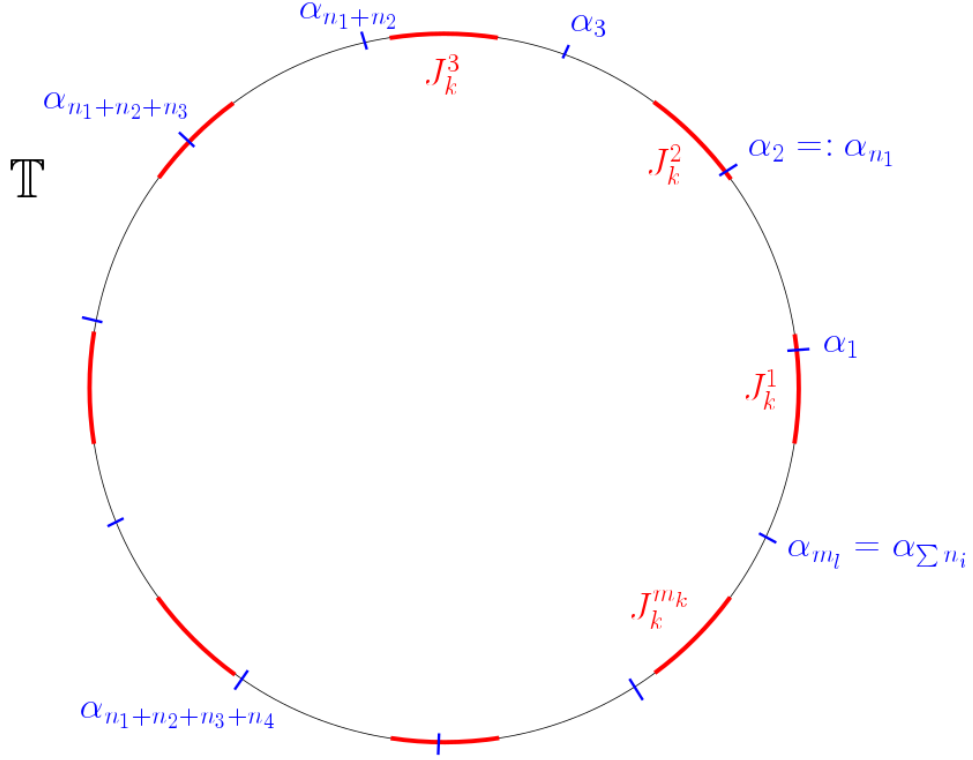
$$\alpha_{n_1+1}, \alpha_{n_1+2}, \dots, \alpha_{n_1+n_2} \notin m_k^{-1}J_k$$

$$\alpha_{n_1+n_2+1}, \alpha_{n_1+n_2+2}, \dots, \alpha_{n_1+n_2+n_3} \in m_k^{-1}J_k$$

$$\alpha_{n_1+n_2+n_3+1}, \alpha_{n_1+n_2+n_3+2}, \dots, \alpha_{n_1+n_2+n_3+n_4} \notin m_k^{-1}J_k \dots$$

Il y a donc n_1 centres consécutifs dans $m_k^{-1}J_k$, puis n_2 dans $\mathbb{T} \setminus \left(m_k^{-1}J_k\right)$, etc. Notre objectif est dorénavant de montrer que $n_{2i+2} \geq n_{2i+1} - 1$ ce qui signifiera qu'il y a beaucoup de centres hors de $m_k^{-1}J_k$.

Voici un exemple d'une telle indexation.



2.1.3.iii Affirmation 3 : $n_{2i+2} \geq n_{2i+1} - 1$ pour tout $i \leq M/2 - 1$

Nous allons démontrer ici que quel que soit $i \leq M/2 - 1$, on a

$$n_{2i+2} \geq n_{2i+1} - 1. \quad (2.1.2)$$

Pour cela, il faudra distinguer deux cas, selon que m_k et m_l sont de tailles comparables ou non. Tout d'abord notons que si $n_{2i+1} = 1$ alors (2.1.2) est triviale car $n_i \geq 1$ par construction. On peut donc supposer que $n_{2i+1} \geq 2$.

- Premier cas : il existe j tel que α_j et α_{j+1} appartiennent au même intervalle de $m_k^{-1}J_k$ (donc m_k est beaucoup plus petit que m_l). Dans ce cas

$$|\alpha_{j+1} - \alpha_j| = \frac{1}{m_l} \leq \frac{\mu(J_k)}{m_k} < \frac{1 - \mu(J_k)}{m_k},$$

puisque $\mu(J_k) < 1/2$. Ainsi si deux centres consécutifs sont dans $m_k^{-1}J_k$, ils sont nécessairement dans le même intervalle composant $m_k^{-1}J_k$. De cette manière, les n_{2i+1} centres consécutifs $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}}, \alpha_{n_1+\dots+n_{2i+2}}, \dots, \alpha_{n_1+\dots+n_{2i+2i+1}}$ sont dans un même intervalle de $m_k^{-1}J_k$, ce qui implique

$$\frac{\mu(J_k)}{m_k} \geq \frac{n_{2i+1} - 1}{m_l}.$$

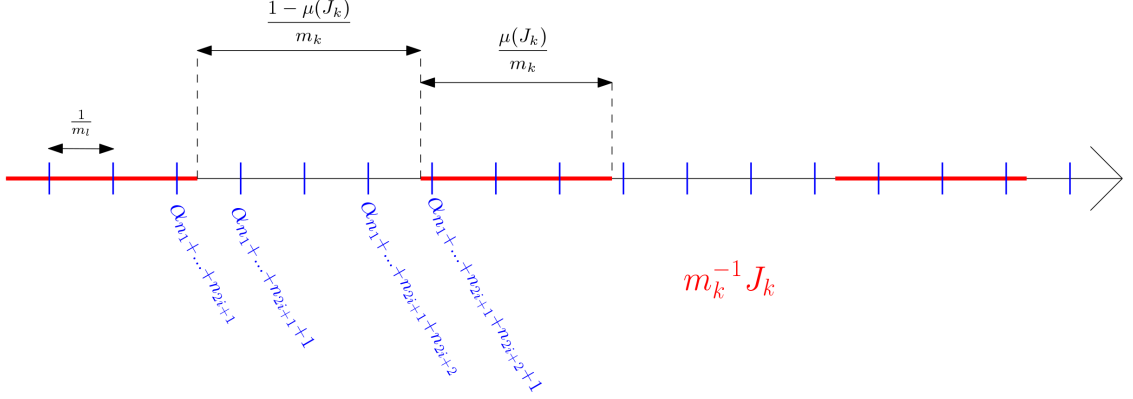
Ainsi

$$\frac{1 - \mu(J_k)}{m_k} > \frac{n_{2i+1} - 1}{m_l}.$$

Or

$$\frac{1 - \mu(J_k)}{m_k} \leq \frac{n_{2i+2} + 1}{m_l},$$

puisque $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}}$ n'appartient pas à $\mathbb{T} \setminus (m_k^{-1}J_k)$, $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}+1}, \dots, \alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}+n_{2i+2}}$ appartiennent au même intervalle de $\mathbb{T} \setminus (m_k^{-1}J_k)$ et $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}+n_{2i+2}+1}$ n'appartient pas à $\mathbb{T} \setminus (m_k^{-1}J_k)$.



Finalement

$$\frac{n_{2i+2} + 1}{m_l} > \frac{n_{2i+1} - 1}{m_l},$$

donc $n_{2i+2} > n_{2i+1} - 2$ et comme n_{2i+2} et n_{2i+1} sont des entiers, on a bien $n_{2i+2} + 1 \geq n_{2i+1} - 1$ dans ce premier cas.

- Deuxième cas : on ne peut pas trouver deux centres consécutifs α_j et α_{j+1} qui appartiennent au même intervalle de $m_k^{-1}J_k$ (donc m_k est proche de m_l). Comme $n_{2i+1} \geq 2$, les n_{2i+1} centres $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}}, \alpha_{n_1+\dots+n_{2i+2}}, \dots, \alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}+n_{2i+2}}$ sont dans $m_k^{-1}J_k$ mais dans des intervalles différents. De plus la distance entre les deux morceaux J_k^p et J_k^{p+2} , notée $d(J_k^p, J_k^{p+2})$, vaut $\frac{2-\mu(J_k)}{m_k}$ (c'est la distance entre les deux centres $\frac{2}{m_k}$ à laquelle on a retiré le rayon de J_k^p et celui de J_k^{p+2}), donc

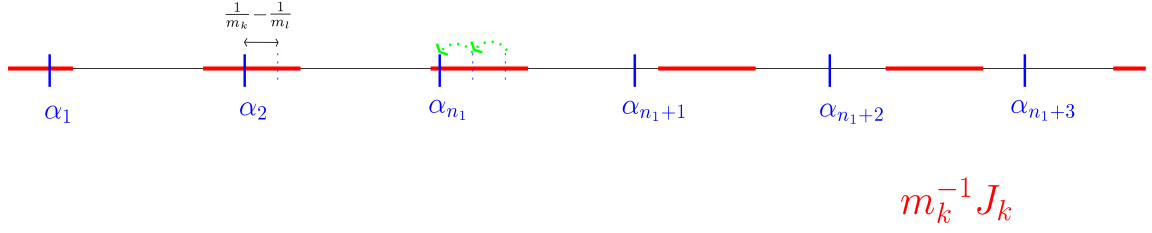
$$|\alpha_j - \alpha_{j+1}| = \frac{1}{m_l} < \frac{2}{m_k} - \frac{\mu(J_k)}{m_k} = d(J_k^p, J_k^{p+2}),$$

et donc si $\alpha_j \in J_k^p$ alors $\alpha_{j+1} \in J_k^{p+1}$. Ainsi si $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}} \in J_k^{p+1}$ alors $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}+j} \in J_k^{p+j}$ pour tout $2 \leq j \leq n_{2i+1}$. Modulo $1/m_k$, ces n_{2i+1} intervalles consécutifs $\{J_k^{p+j}\}_{j=1}^{n_{2i+1}}$ sont confondus et forment un intervalle J_0 de mesure $\mu(J_k^{p+j})$,

$$\mu(J_0) = \mu(J_k^{p+j}) = \frac{\mu(J_k)}{m_k}.$$

Aussi, J_0 contient les n_{2i+1} centres consécutifs $\{\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}+j}\}_{j=1}^{n_{2i+1}}$ modulo $1/m_k$. Or

la distance entre deux centres consécutifs modulo $1/m_k$ est $\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_l}$.



De cette manière,

$$\mu(J_0) \geq (n_{2i+1} - 1) \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_l} \right),$$

d'où

$$\frac{\mu(J_k)}{m_k} \geq (n_{2i+1} - 1) \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_l} \right),$$

et comme $\mu(J_k) < 1/2$,

$$\frac{1 - \mu(J_k)}{m_k} > (n_{2i+1} - 1) \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_l} \right).$$

D'autre part comme $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}+1}$, $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i+1}+2}, \dots, \alpha_{n_1+\dots+n_{2i}+n_{2i+2}}$ sont dans des intervalles consécutifs de $\mathbb{T} \setminus (m_k^{-1} J_k)$, et comme $\alpha_{n_1+\dots+n_{2i}+n_{2i+2}+1} \in m_k^{-1} J_k$, on a

$$\frac{1 - \mu(J_k)}{m_k} \leq (n_{2i+2} + 1) \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_l} \right).$$

Finalement, comme n_{2i+1} et n_{2i+2} sont des entiers, on obtient également $n_{2i+2} + 1 \geq n_{2i+1} - 1$ dans ce second cas.

Nous avons donc démontré l'inégalité (2.1.2), c'est à dire $n_{2i+2} \geq n_{2i+1} - 1$. Comme M est nécessairement pair et comme trivialement $M \leq m_l$, on a

$$m_l = \sum_{i=1}^{M/2} n_{2i-1} + \sum_{i=1}^{M/2} n_{2i} \geq 2 \sum_{i=1}^{M/2} n_{2i-1} - \frac{M}{2} \geq 2 \sum_{i=1}^{M/2} n_{2i-1} - \frac{m_l}{2},$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{M/2} n_{2i-1} \leq \frac{3m_l}{4}. \quad (2.1.3)$$

Enfin, par construction des $\{n_i\}_{i=1}^M$ puis par (2.1.3), on a

$$\# \{m_k^{-1} J_k \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l}\} = \sum_{i=1}^{M/2} n_{2i-1} \leq \frac{3m_l}{4}.$$

Donc finalement, en reprenant le raisonnement de la partie 2.1.3.i, chaque intervalle de $m_l^{-1} J_l$ dont le centre n'appartient pas à $m_k^{-1} J_k$ a au moins une de ses moitiés dans $m_l^{-1} J_l \setminus m_k^{-1} J_k$, et ainsi

$$\mu \left((m_k^{-1} J_k) \Delta (m_l^{-1} J_l) \right) \geq \frac{\mu(m_l^{-1} J_l)}{2} \# \left\{ (\mathbb{T} \setminus m_k^{-1} J_k) \cap \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_l} \right\} \geq \frac{b}{2m_l} \frac{m_l}{4} \geq \frac{b}{8}.$$

Ce qui est absurde, car par (2.1.1), on aurait

$$\varepsilon_k^2 + \varepsilon_l^2 \geq \frac{1}{8},$$

donc par (1.2.6)

$$\varepsilon \geq \frac{1}{16K},$$

ce qui contredit l'hypothèse (1.0.2) et conclut la preuve du lemme 2.1.1. \square

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{16K}$.

On sait désormais que m ne dépend pas de k . Posons $J = \bigcap_{k=1}^K J_k$. Par construction $m^{-1}J$ contient B , et de plus on a

$$\mu(J) \leq b + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 b,$$

d'où par (1.2.6)

$$\mu(J) < (1 + \varepsilon) b. \quad (2.1.4)$$

Enfin, trivialement par le lemme 2.1.2, on a également

$$\mu(J) \leq \frac{1}{2}. \quad (2.1.5)$$

Afin de simplifier l'argumentation, on commence par translater A . Maintenant que nous savons que m ne dépend pas de k , et comme $\tilde{A}_{k+1} \subseteq \tilde{A}_k$ quel que soit $k \in \{1, \dots, K-1\}$, on a

$$m\tilde{A}_K \subseteq m\tilde{A}_{K-1} \subseteq \dots \subseteq m\tilde{A}_2 \subseteq m\tilde{A}_1.$$

Ainsi, quitte à choisir des intervalles I_k minimaux tels que $m\tilde{A}_k \subseteq I_k$, on peut supposer qu'ils sont inclus les uns dans les autres. C'est à dire, on peut supposer que quel que soit $k \in \{2, \dots, K\}$

$$I_k \subseteq I_{k-1}. \quad (2.1.6)$$

Rappelons que par (1.2.8), on a

$$\mu(\tilde{A}_1) + \varepsilon_1^2 b < 1 - b - \varepsilon_1^2 b,$$

donc d'après le lemme 2.1.1, on a

$$\begin{aligned} \mu(I_1) &< 1 - b - \varepsilon_1^2 b \\ &< 1 - b. \end{aligned}$$

Ainsi il existe $a \in \mathbb{T}$ tel que $d(0, I_1 + a) > \frac{b}{2}$ et donc, quitte à translater A par $\frac{a}{m}$, on peut supposer que $d(0, I_1) > \frac{b}{2}$. En effet, quel que soit $k \in \{1, \dots, K\}$, on a

$$m\left(\widetilde{A + \frac{a}{m}}\right)_k = m\left(\frac{a}{m} + \tilde{A}_k\right) = a + m\tilde{A}_k \subseteq a + I_k.$$

De cette manière, et par (2.1.6), on peut supposer que

$$d(0, I_k) > \frac{b}{2}, \quad (2.1.7)$$

quel que soit $k \in \{1, \dots, K\}$. En particulier, $0 \notin I_1$ et $0 \notin \tilde{A}_K$.

Nous voulons maintenant prouver que $m = 1$ et pour cela, nous allons avoir besoin d'informations sur la mesure de I_K .

2.2 Encadrement de la mesure de I_K

On rappelle que le lemme 1.2.1 donne

$$\mu(\tilde{A}_K) = \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k (\varepsilon_{k+1}^1 - \varepsilon_{k+1}^2) b.$$

Un encadrement précis de la mesure de I_K découle directement de ce lemme et fait l'objet du corollaire suivant.

Corollaire 2.2.1. *On a*

$$\delta b - K(\log K - 1)\varepsilon b \leq \mu(I_K) \leq \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k (\varepsilon_{k+1}^1 - \varepsilon_{k+1}^2) b + \varepsilon_K^2 b.$$

Preuve. La majoration est immédiate par le lemme 1.2.1 puisque

$$\mu(I_K) \leq \mu(\tilde{A}_K) + \varepsilon_K^2 b.$$

La minoration provient du fait que $\tilde{A}_K \subseteq I_K$, donc

$$\begin{aligned} \mu(I_K) &\geq \mu(\tilde{A}_K) \geq \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k (\varepsilon_{k+1}^1 - \varepsilon_{k+1}^2) b \\ &\geq \delta b - \frac{b}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k \varepsilon_{k+1}^2 \geq \delta b - \frac{b}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k \frac{K}{K+1-(k+1)} \varepsilon \end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue grâce à (1.2.6). Ainsi

$$\begin{aligned} \mu(I_K) &\geq \delta b - b\varepsilon \sum_{k=1}^{K-1} \frac{k}{K-k} \geq \delta b - b\varepsilon \sum_{k=1}^{K-1} \left(\frac{K}{k} - 1 \right) \\ &\geq \delta b - b\varepsilon K(\log K - 1). \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2.2. *On a*

$$\mu(I_K) \leq \delta b + 2\varepsilon b.$$

Preuve. D'après le corollaire 2.2.1, on a

$$\begin{aligned}
\mu(I_K) &\leq \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k \left(\varepsilon_{k+1}^1 - \varepsilon_{k+1}^2 \right) b + \varepsilon_K^2 b \\
&\leq \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} \varepsilon_{k+1}^1 b - \frac{K-1}{K} \varepsilon_K^2 b + \varepsilon_K^2 b \\
&\leq \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} \varepsilon_{k+1}^1 b + \frac{1}{K} \varepsilon_K^2 b,
\end{aligned}$$

or comme $\varepsilon = \sum_{k \geq K+2} \varepsilon_k^3 + \sum_{k=0}^K (k/K) \left(\varepsilon_{k+1}^1 + \varepsilon_{K+1-k}^2 \right)$ par (1.2.2), on a

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} \varepsilon_{k+1}^1 \leq \varepsilon,$$

et finalement par (1.2.6), on a $\varepsilon_K^2 \leq K\varepsilon$ et on obtient donc le corollaire

$$\mu(I_K) \leq \delta b + 2\varepsilon b.$$

□

2.3 Preuve de $m = 1$

2.3.1 Premières informations et début de la stratégie

Pour plus de lisibilité, posons

$$J' = \pi^{-1}(J) \cap [0, 1],$$

et

$$I'_1 = \pi^{-1}(I_1) \cap [0, 1].$$

Écrivons $J' = J_+ \sqcup J_-$ où J_+ est un intervalle fermé de $[0, 1/2[$ et J_- un intervalle fermé de $[1/2, 1]$ (bien définis car $0 \in B$ par hypothèse, $B \subseteq J'$ et $\lambda(J') = \mu(J) < \frac{1}{2}$ d'après (2.1.5)). On pose $b_+ = \mu(J_+)$ et $b_- = \mu(J_-)$. Supposons que $m > 1$. Comme $0 \in B$

$$B = \bigcup_{l=0}^m B_l \text{ où } B_0 = B \cap \frac{J_+}{m}, B_m = B \cap \frac{J_- + m - 1}{m} \text{ et } B_l = B \cap \frac{l + (J_+ \cup (J_- - 1))}{m} \text{ (} 0 < l < m \text{)}.$$

Voilà une représentation de J et B si $\varepsilon = 0$ et $n = 5$ par exemple :

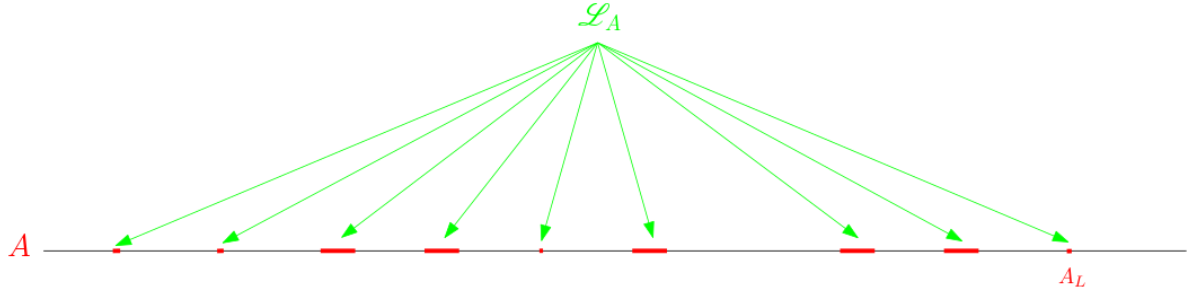


Par (2.1.7), $0 \notin I_1$ et donc I'_1 est un intervalle de \mathbb{R} . On a donc simplement $A = \bigsqcup_{l=0}^L A_l$ où $A_l = A \cap \frac{l + I'_1}{m}$ et $L = \max \{l \mid A_l \neq \emptyset\}$. Écrivons $A + B = S = \bigcup_{l=0}^{L+m} S_l$ où $S_l = (A + B) \cap \frac{l + (J_+ \cup (J_- - 1)) + I'_1}{m}$. Remarquons que pour tout $(i, j) \in [0, m]^2$ tel que $A_i \neq \emptyset$, $B_j \neq \emptyset$ et $i + j = l$, on a $A_i + B_j \subseteq S_l$. Enfin posons

$$\mathcal{L}_A = \{l \geq 0 \mid A_l \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{L}_B = \{l \geq 0 \mid B_l \neq \emptyset\}.$$

On rappelle que $\max \mathcal{L}_A = L$, que $\max \mathcal{L}_B = m$ et que $\min \mathcal{L}_B = 0$.



Remarque 2.3.1. Dans le cas d'égalité $\varepsilon = 0$, traité par de Roton [9], on utilise les inégalités

$$\begin{aligned} \lambda(A) + (K + \delta)b &= \lambda(A + B) = \sum_{\ell=0}^{L+m} \lambda(S_\ell) \\ &= \lambda(S_0) + \sum_{\ell=0}^L \lambda(S_{\ell+1}) + \sum_{\ell=2}^m \lambda(S_{L+\ell}) \\ &\geq \lambda(A_0) + \lambda(B_0) + \sum_{\ell \in \mathcal{L}_A} (\lambda(A_\ell) + \lambda(B_1)) + \sum_{\ell=2}^m (\lambda(A_L) + \lambda(B_\ell)) \\ &\geq \lambda(A) + \lambda(A_0) + (m - 1)\lambda(A_L) + b - \frac{b}{m} + \frac{b}{m} \#\{\ell \mid A_\ell \neq \emptyset\} \\ &\geq \lambda(A) + b - \frac{b}{m} + \frac{b}{m} \#\mathcal{L}_A, \end{aligned}$$

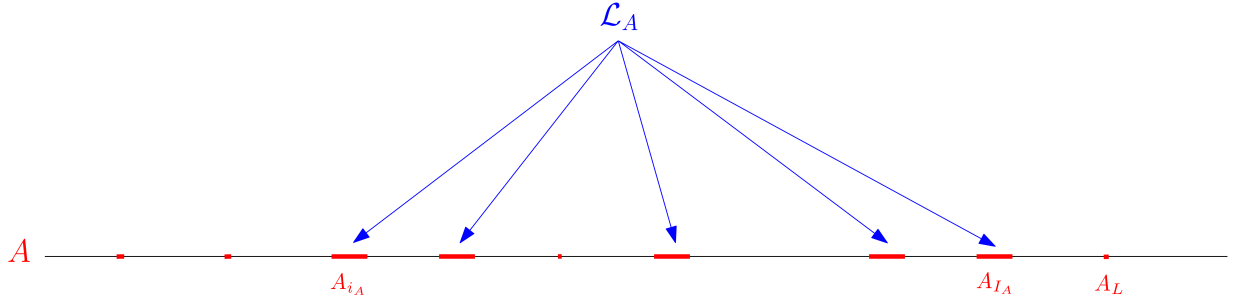
pour obtenir une absurdité et conclure que m vaut 1. Nous allons procéder de manière semblable mais quelques complications apparaissent. En effet, l'erreur ε est reconduite jusque dans les majorations des mesures de I_K et J . De ce fait, certains A_l et certains B_l peuvent être de très petite mesure ou même vides. S'ils sont vides, cela pose un problème pour utiliser des inégalités du type $\lambda(S_{i+j}) \geq \lambda(A_i) + \lambda(B_j)$ et c'est ce qui explique que nous ayons recouru à \mathcal{L}_A et \mathcal{L}_B .

S'ils sont seulement de très petite mesure, cela pose tout de même problème pour obtenir l'absurdité car si nous choisissons un morceau A_l (là où on peut choisir simplement A_L dans le cas d'égalité) de trop petite mesure pour sommer les morceaux de B , sa contribution sera trop faible. De même, nous ne parviendrons pas à conclure si nous choisissons un trop petit morceau de B (là où on peut simplement choisir B_1 dans le cas d'égalité). C'est ce qui nous amène à compliquer un peu la stratégie. Nous allons considérer le plus gros morceau de B et définir l'ensemble \mathcal{L}_A (définition juste après) qui regroupe les morceaux suffisamment gros de A .

On pose

$$\mathcal{L}_A = \left\{ l \geq 0 \mid \lambda(A_l) \geq \frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right\},$$

où $f(\varepsilon, K)$ est une fonction qu'on optimisera, $i_A = \min \mathcal{L}_A$, $I_A = \max \mathcal{L}_A$ et B_M est le plus gros "morceau" de B , c'est à dire tel que $\lambda(B_M) = \max \{\lambda(B_i) \mid i \in \mathcal{L}_B\}$.



Remarque 2.3.2. Pour que A_l soit de mesure strictement positive quel que soit $l \in \mathcal{L}_A$, il faut que $\mu(I_K) - f(\varepsilon, K) b > 0$. Or rappelons que par le corollaire 2.2.1

$$\mu(I_K) - f(\varepsilon, K) b \geq (\delta - K(\log(K) - 1)\varepsilon - f(\varepsilon, K)) b.$$

Il suffit donc que $(\delta - K(\log(K) - 1)\varepsilon - f(\varepsilon, K))$ soit strictement positif. On sera amenés à choisir soit $f(\varepsilon, K) = K\varepsilon^{1/2}$ soit $f(\varepsilon, K) = K\varepsilon^{1/3}$ et on imposera donc

$$\delta - K(\log(K) - 1)\varepsilon - K\varepsilon^{1/3} > 0,$$

ce qui est assuré par l'hypothèse (1.0.2)

$$\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K} \right)^3.$$

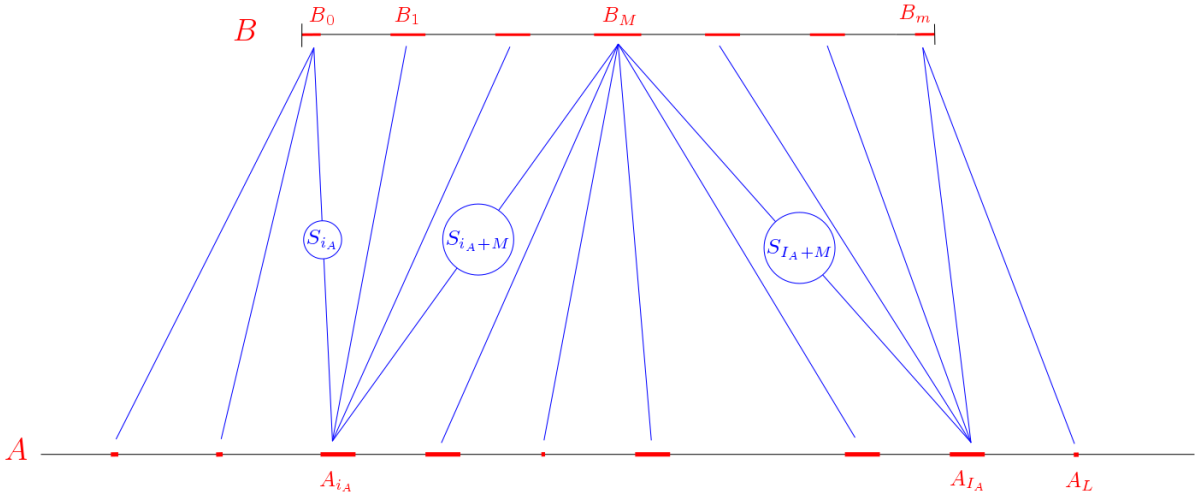
Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K} \right)^3$.

Ainsi grâce à cette hypothèse, on a bien

$$\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b > 0.$$

Finalement, quel que soit $i \in \mathcal{L}_A$, on a bien $\lambda(A_i) > 0$, donc $\lambda(S_{i+j}) \geq \lambda(A_i) + \lambda(B_j)$ pour tout $j \in \mathcal{L}_B$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \lambda(A+B) &= \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon) b = \sum_{l=0}^{L+m} \lambda(S_l) \\ &\geq \sum_{l=0}^{i_A} \lambda(S_l) + \sum_{l=i_A+1}^{i_A+M} \lambda(S_l) + \sum_{l=i_A+M+1}^{I_A+M} \lambda(S_l) + \sum_{l=I_A+M+1}^{I_A+m} \lambda(S_l) + \sum_{l=I_A+m+1}^{L+m} \lambda(S_l) \\ &\geq \sum_{\substack{l=0 \\ l \in \mathcal{L}_A}}^{i_A} \lambda(B_0 + A_l) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \in \mathcal{L}_B}}^M \lambda(A_{i_A} + B_l) + \sum_{\substack{l=i_A+1 \\ l \in \mathcal{L}_A}}^{I_A} \lambda(B_M + A_l) \\ &\quad + \sum_{\substack{l=M+1 \\ l \in \mathcal{L}_B}}^m \lambda(A_{I_A} + B_l) + \sum_{\substack{l=I_A+1 \\ l \in \mathcal{L}_A}}^L \lambda(B_m + A_l) \\ &\geq \sum_{\substack{l=0 \\ l \in \mathcal{L}_A}}^{i_A} (\lambda(B_0) + \lambda(A_l)) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \in \mathcal{L}_B}}^M (\lambda(A_{i_A}) + \lambda(B_l)) + \sum_{\substack{l=i_A+1 \\ l \in \mathcal{L}_A}}^{I_A} (\lambda(B_M) + \lambda(A_l)) \\ &\quad + \sum_{\substack{l=M+1 \\ l \in \mathcal{L}_B}}^m (\lambda(A_{I_A}) + \lambda(B_l)) + \sum_{\substack{l=I_A+1 \\ l \in \mathcal{L}_A}}^L (\lambda(B_m) + \lambda(A_l)) \\ &\geq \lambda(A) + b + \lambda(B_M) \times \#(\mathcal{L}_A \cap \llbracket i_A + 1, I_A \rrbracket) + \lambda(A_{i_A}) \times \#(\mathcal{L}_B \cap \llbracket 1, M \rrbracket) \\ &\quad + \lambda(A_{I_A}) \times \#(\mathcal{L}_B \cap \llbracket M + 1, m \rrbracket) \\ &\geq \lambda(A) + b + \#(\mathcal{L}_A \cap \llbracket i_A + 1, I_A \rrbracket) \lambda(B_M) + (\#\mathcal{L}_B - 1) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right) \\ &\geq \lambda(A) + b + (\#\mathcal{L}_A - 1) \lambda(B_M) + (\#\mathcal{L}_B - 1) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right). \end{aligned}$$



Ainsi, on a

$$\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + b + (\#\mathcal{L}_A - 1)\lambda(B_M) + (\#\mathcal{L}_B - 1) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m}b \right). \quad (2.3.1)$$

Pour pouvoir conclure avec cette stratégie, nous avons besoin d'une minoration de $\lambda(B_M)$, de $\#\mathcal{L}_B$ et de $\#\mathcal{L}_A$. Ce qui nous amène aux lemmes de la partie suivante.

2.3.2 Minoration de $\lambda(B_M)$, $\#\mathcal{L}_B$ et $\#\mathcal{L}_A$

Les minoration de $\lambda(B_M)$ et $\#\mathcal{L}_B$ font chacune l'objet de l'un des deux lemmes suivants mais pour obtenir le moins de contraintes possible, nous différencierons deux cas pour la minoration de $\#\mathcal{L}_A$. Ainsi nous allons établir deux minoration de $\#\mathcal{L}_A$, une valable quand m est grand et l'autre valable quand m est petit. Elles feront l'objet des deux derniers lemmes de cette partie. Nous n'aurons alors qu'à appliquer la minoration correspondante suivant la taille de m afin d'obtenir une absurdité dans le cas $m \geq 2$ en ayant le moins de contraintes possible.

Lemme 2.3.3. *Si $m \geq 2$ et B_M est le plus gros "morceau" de B , c'est à dire tel que $\lambda(B_M) = \max \{\mu(B_i) \mid i \in \mathcal{L}_B\}$, on a*

$$\lambda(B_M) \geq \frac{1 - \varepsilon}{m}b.$$

Preuve. Rappelons qu'on a supposé $m \geq 2$. De plus, $B \subset m^{-1}J$ et $\lambda(J) \leq (1 + \varepsilon)b$. D'où

$$\begin{aligned} \lambda(B_M) &= \max \{\mu(B_i) \mid i \in \mathcal{L}_B\} \geq \max \{\mu(B_i) \mid i \in \mathcal{L}_B \setminus \{0, m\}\} \\ &\geq \frac{b - \lambda(J)/m}{m - 1} \geq \frac{b - \frac{1 + \varepsilon}{m}b}{m - 1} \\ &\geq \frac{b}{m} \left(1 - \frac{\varepsilon}{m - 1} \right) \geq \frac{1 - \varepsilon}{m}b. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.4. *Si $m \geq 2$ et $\mathcal{L}_B = \{l \geq 0 \mid B_l \neq \emptyset\}$, on a*

$$\#\mathcal{L}_B \geq 1 + m \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right).$$

Preuve. On a $B \subseteq m^{-1}J$, $\mu(J) \leq b + \varepsilon b$ et $B_l = B \cap \frac{l + J}{m}$ ($0 < l < m$), donc $\lambda(B_0) + \lambda(B_m) \leq \frac{1 + \varepsilon}{m}b$ et $\lambda(B_l) \leq \frac{1 + \varepsilon}{m}b$ pour tout $l \in \{1, \dots, m - 1\}$ et ainsi

$$\begin{aligned} b &= \sum_{l \in \mathcal{L}_B} \lambda(B_l) = \lambda(B_0) + \lambda(B_m) + \sum_{\substack{l \in \mathcal{L}_B \\ l \neq 0, m}} \lambda(B_l) \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon}{m}b + \sum_{\substack{l \in \mathcal{L}_B \\ l \neq 0, m}} \frac{1 + \varepsilon}{m}b, \end{aligned}$$

d'où

$$\#(\mathcal{L}_B \setminus \{0, m\}) + 1 \geq \frac{m}{1 + \varepsilon}.$$

Comme $0, 1 \in B$, on a $0, m \in \mathcal{L}_B$ d'où finalement

$$\#\mathcal{L}_B \geq \frac{m}{1 + \varepsilon} + 1 \geq 1 + m \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right).$$

□

Pour établir les deux minoration de $\#\mathcal{L}_A$ (suivant la taille de m), nous allons avoir besoin de quelques estimations. Commençons par quelques définitions. On pose

- $\tilde{A}_K^l = \tilde{A}_K \cap \frac{l + I'_K}{m}$ ($0 \leq l < m$), où $I'_K = \pi^{-1}(I_K) \cap [0, 1]$;
- $\mathcal{L} = \{l \geq 0 \mid \tilde{A}_K^l \neq \emptyset\}$ et $N = \#\mathcal{L}$;
- $L_f = \left\{l \geq 0 \mid \mu(\tilde{A}_K^l) \geq \frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m}b\right\}$ et $n_f = \#L_f$;
- $\Omega(\tilde{A}_K^l) = \{i \in \mathcal{L}_A \mid (A_i \bmod 1) \cap \tilde{A}_K^l \neq \emptyset\}$, pour tout $l \in \mathcal{L}$;
- $\sigma_1(\tilde{A}_K^l) = \#\Omega(\tilde{A}_K^l)$.

Nous allons donner une minoration de $\sigma_1(\tilde{A}_K^l)$, de N puis de n_f . Par définition de \tilde{A}_K , pour tout $l \in \mathcal{L}$, on a

$$\sigma_1(\tilde{A}_K^l) \geq K. \quad (2.3.2)$$

Pour N , on a

$$\mu(I_K) - \varepsilon_K^2 b \leq \mu(\tilde{A}_K) \leq N \frac{\mu(I_K)}{m},$$

d'où

$$N \geq m \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2 b}{\mu(I_K)}\right). \quad (2.3.3)$$

Au sujet de n_f , on a

$$\begin{aligned} \mu(I_K) - \varepsilon_K^2 b &\leq \mu(\tilde{A}_K) = \sum_{l=0}^{m-1} \mu(\tilde{A}_K^l) \\ &\leq n_f \frac{\mu(I_K)}{m} + (m - n_f) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m}b\right) \\ &\leq n_f \frac{f(\varepsilon, K)}{m}b + \mu(I_K) - f(\varepsilon, K)b, \end{aligned}$$

d'où

$$n_f \geq m - \frac{\varepsilon_K^2 b}{f(\varepsilon, K)b/m},$$

et donc finalement

$$n_f \geq m \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)}\right). \quad (2.3.4)$$

Nous allons également avoir recours à la majoration de $\#\mathcal{L}_A$ suivante.

$$\#\mathcal{L}_A \leq Km. \quad (2.3.5)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)b &= \lambda(A + B) \\ &\geq \lambda(B_0) + \dots + \lambda(B_{M-1}) + \#\mathcal{L}_A \times \lambda(B_M) + \lambda(A) + \lambda(B_{M+1}) + \dots + \lambda(B_m) \\ &\geq \lambda(A) + b - \lambda(B_M) + \#\mathcal{L}_A \times \lambda(B_M). \end{aligned}$$

Or $\lambda(B_M) \geq \frac{1-\varepsilon}{m}b$, donc

$$\#\mathcal{L}_A \leq \frac{m(K-1+\delta+\varepsilon)}{1-\varepsilon} + 1 \leq Km + \frac{m(\varepsilon(K+1)+\delta-1)}{1-\varepsilon} + 1.$$

Mais $\varepsilon < \frac{1-\delta}{K+1}$ car par hypothèse $\varepsilon < \left(\frac{1-\delta}{K}\right)^2$ et $K \geq 2$ (cf. remarque 1.0.1), donc

$$\varepsilon(K+1) + \delta - 1 < 0,$$

et ainsi

$$\#\mathcal{L}_A < Km + 1,$$

d'où finalement

$$\#\mathcal{L}_A \leq Km.$$

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1-\delta}{K+1}$.

□

Nous pouvons désormais établir les deux minoration de $\#\mathcal{L}_A$. Le lemme suivant va nous donner une bonne minoration de $\#\mathcal{L}_A$ quand m est assez petit.

Lemme 2.3.5. *Si $2 \leq m < \frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$ et $\mathcal{L}_A = \left\{ l \geq 0 \mid \lambda(A_l) \geq \frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m}b \right\}$, on a*

$$\#\mathcal{L}_A \geq Km \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} \right).$$

Preuve. $\tilde{A}_K \subseteq m^{-1}I_K$ et $\mu(I_K) \leq \mu(\tilde{A}_K) + \varepsilon_K^2 b$. Par (2.3.3), on a

$$N \geq m \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2 b}{\mu(I_K)} \right),$$

et donc $N > m - 1$ car $m < \frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$ par hypothèse du lemme. De plus, comme N est un entier inférieur ou égal à m par définition, on a

$$N = m. \quad (2.3.6)$$

Ainsi les m morceaux de \tilde{A}_K sont non vides et ils demandent chacun une contribution d'au moins K morceaux de A (par définition de \tilde{A}_K) et donc $\#\mathcal{L}_A$ va contenir au moins Km éléments. En effet, par (2.3.2), on a

$$\#\mathcal{L}_A \geq \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_1(\tilde{A}_K^l) \geq NK,$$

et d'où, d'après (2.3.6)

$$\#\mathcal{L}_A \geq Km. \quad (2.3.7)$$

Ainsi, d'après (2.3.7) et (2.3.5), on a

$$\#\mathcal{L}_A = Km. \quad (2.3.8)$$

De cette manière, en reprenant nos calculs, on a

$$Km = \#\mathcal{L}_A = \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_1(\tilde{A}_K^l),$$

et donc nécessairement, comme $N = m$ d'après (2.3.6), pour tout $l \in \mathcal{L}$

$$\sigma_1(\tilde{A}_K^l) = K,$$

ce qui implique finalement, pour tout $i \in \Omega(\tilde{A}_K^l)$

$$\lambda(A_i) \geq \mu(\tilde{A}_K^l). \quad (2.3.9)$$

En particulier, pour tout $l \in L_f$, on a pour tout $i \in \Omega(\tilde{A}_K^l)$

$$\lambda(A_i) \geq \frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b,$$

et donc $i \in \mathcal{L}_A$. De cette manière,

$$\#\mathcal{L}_A \geq \sum_{l \in L_f} \sigma_1(\tilde{A}_K^l),$$

d'où

$$\#\mathcal{L}_A \geq Kn_f. \quad (2.3.10)$$

Finalement, avec (2.3.4), on obtient le lemme

$$\#\mathcal{L}_A \geq Km \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} \right).$$

□

Nous pourrions utiliser cette minoration de $\#\mathcal{L}_A$ si m est suffisamment petit et il nous restera donc à traiter le cas où m est grand. Pour cela, nous utiliserons une autre minoration de $\#\mathcal{L}_A$ qui fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.3.6. Si $m \geq \frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$ et $\mathcal{L}_A = \left\{ l \geq 0 \mid \lambda(A_l) \geq \frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right\}$, on a

$$\#\mathcal{L}_A \geq Km \left(1 - \frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - K\varepsilon \left(\frac{1}{g(\varepsilon, K)} - \frac{b}{\mu(I_K)} \right) \right),$$

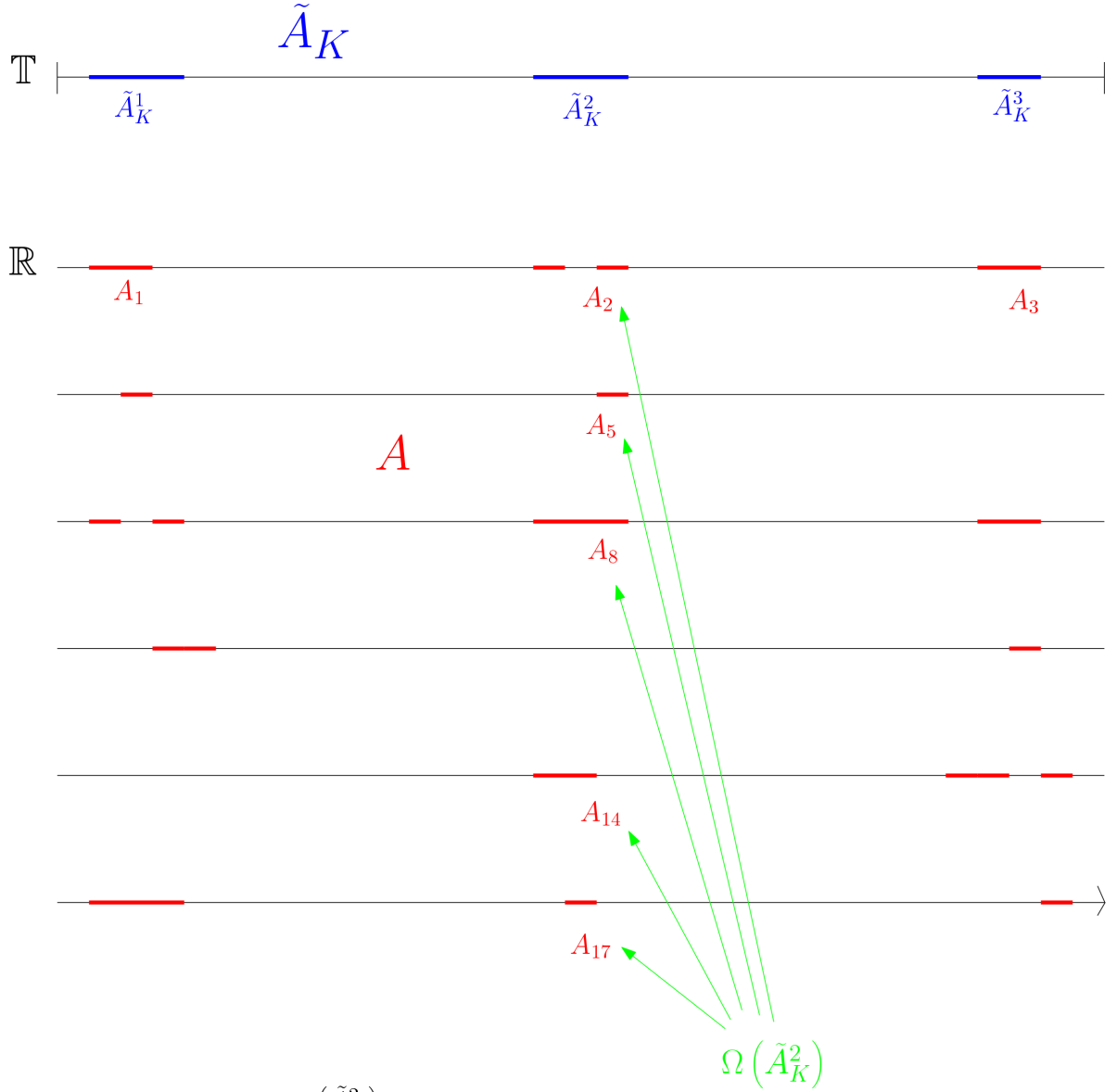
où g est telle que $0 < g(\varepsilon, K) < f(\varepsilon, K)$ et est à optimiser.

Preuve. On a $\tilde{A}_K \subseteq m^{-1}I_K$ et $\mu(I_K) \leq \mu(\tilde{A}_K) + \varepsilon_K^2 b$.

Nous allons avoir besoin de définir des objets similaires à ceux apparaissant dans la preuve du lemme précédent.

On pose $\tilde{A}_K^l = \tilde{A}_K \cap \frac{l + I'_K}{m}$ ($0 \leq l < m$), où $I'_K = \pi^{-1}(I_K) \cap [0, 1]$. Soit $g(\varepsilon, K)$ une fonction positive telle que $g(\varepsilon, K) < f(\varepsilon, K)$ que nous déterminerons plus tard.

Remarque 2.3.7. Ici, comme m peut être très grand, nous n'avons plus nécessairement $N = m$ et $\#\mathcal{L}_A = Km$. Ainsi il est possible qu'un gros morceau de \tilde{A}_K reçoive ses contributions de strictement plus de K morceaux de A . Aussi ces morceaux de A peuvent donc être petits (et donc ne pas compter dans \mathcal{L}_A), bien que le morceau de \tilde{A}_K auquel ils contribuent soit gros. C'est pour cela que nous nous intéressons à L_g , où g est une nouvelle fonction, qui regroupe tous les très gros morceaux de \tilde{A}_K (c'est à dire de taille supérieure à celle demandée pour être dans \mathcal{L}_A) afin de nous assurer que leur contribution dans A , même si elle provient de strictement plus de K étages, fournisse de suffisamment gros morceaux pour être comptés dans \mathcal{L}_A .



$$\sigma_1(\tilde{A}_K^2) = 5$$

Rappelons que $n_g = \#L_g$ et que par (2.3.2), pour tout $l \in L_g$, on a

$$\sigma_1(\tilde{A}_K^l) \geq K.$$

Ainsi pour tout $l \in L_g$, on définit

$$t_l = \sigma_1(\tilde{A}_K^l) - K.$$

Par (2.3.5), on a

$$\begin{aligned} Km &\geq \#\mathcal{L}_A \geq \sum_{l \in L_g} \sigma_1(\tilde{A}_K^l) + K(N - n_g) \\ &\geq \sum_{l \in L_g} (K + t_l) + K(N - n_g) \geq Kn_g + \sum_{l \in L_g} t_l + K(N - n_g) \\ &\geq KN + \sum_{l \in L_g} t_l. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{l \in L_g} t_l \leq K(m - N),$$

et, en utilisant (2.3.3), on obtient

$$\sum_{l \in L_g} t_l \leq Km \frac{\varepsilon_K^2 b}{\mu(I_K)}. \quad (2.3.11)$$

Enfin on pose pour tout $l \in L_g$

$$\sigma_2(\tilde{A}_K^l) = \# \left\{ A_i \mid (A_i \bmod 1) \cap \tilde{A}_K^l \neq \emptyset \text{ et } \lambda(A_i \cap \tilde{A}_K^l) \geq \frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right\}.$$

Ainsi pour tout $l \in L_g$

$$\begin{aligned} K \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{g(\varepsilon, K)}{m} b \right) &\leq \sum_{\ell \in \Omega(\tilde{A}_K^l)} \lambda(A_\ell \cap \tilde{A}_K^l) \\ &\leq (\sigma_1(\tilde{A}_K^l) - \sigma_2(\tilde{A}_K^l)) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right) + \sigma_2(\tilde{A}_K^l) \frac{\mu(I_K)}{m} \\ &\leq (K + t_l - \sigma_2(\tilde{A}_K^l)) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right) + \sigma_2(\tilde{A}_K^l) \frac{\mu(I_K)}{m}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_2(\tilde{A}_K^l) \geq K \frac{f(\varepsilon, K) - g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - \frac{t_l(\mu(I_K) - f(\varepsilon, K)b)}{f(\varepsilon, K)b}.$$

Et finalement

$$\begin{aligned} \#\mathcal{L}_A &\geq \sum_{l \in L_g} \sigma_2(\tilde{A}_K^l) \\ &\geq \sum_{l \in L_g} \left(K \frac{f(\varepsilon, K) - g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - \frac{t_l(\mu(I_K) - f(\varepsilon, K)b)}{f(\varepsilon, K)b} \right) \\ &\geq m \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{g(\varepsilon, K)} \right) K \frac{f(\varepsilon, K) - g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - \frac{\mu(I_K) - f(\varepsilon, K)b}{f(\varepsilon, K)b} \sum_{l \in L_g} t_l \\ &\geq m \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{g(\varepsilon, K)} \right) K \frac{f(\varepsilon, K) - g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - \frac{\mu(I_K) - f(\varepsilon, K)b}{f(\varepsilon, K)b} Km \frac{\varepsilon_K^2 b}{\mu(I_K)} \\ &\geq m \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{g(\varepsilon, K)} \right) K \left(1 - \frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} \right) - \left(\frac{1}{f(\varepsilon, K)} - \frac{b}{\mu(I_K)} \right) Km \varepsilon_K^2, \end{aligned}$$

où la troisième inégalité utilise (2.3.4) et la quatrième (2.3.11). Ainsi

$$\begin{aligned} \#\mathcal{L}_A &\geq Km \left(1 - \frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - \varepsilon_K^2 \left(\frac{1}{g(\varepsilon, K)} - \frac{1}{f(\varepsilon, K)} + \frac{1}{f(\varepsilon, K)} - \frac{b}{\mu(I_K)} \right) \right) \\ &\geq Km \left(1 - \frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - \varepsilon_K^2 \left(\frac{1}{g(\varepsilon, K)} - \frac{b}{\mu(I_K)} \right) \right), \end{aligned}$$

Enfin on conclut en utilisant (1.2.6)

$$\#\mathcal{L}_A \geq Km \left(1 - \frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - K\varepsilon \left(\frac{1}{g(\varepsilon, K)} - \frac{b}{\mu(I_K)} \right) \right).$$

□

Cette minoration de $\#\mathcal{L}_A$ est moins bonne que la précédente mais nous ne l'utiliserons que lorsque m est supérieur à $\frac{\mu(I_K)}{b\varepsilon_K^2}$ et nous pourrions donc utiliser l'inégalité $m \geq \frac{\mu(I_K)}{b\varepsilon_K^2}$ pour pallier cette perte.

Toutes nos minorations sont établies, nous sommes désormais en mesure de conclure. Comme nous l'avons expliqué dans la partie précédente, nous allons distinguer deux cas suivant la taille de m .

2.3.3 Preuve de $m = 1$ lorsque $m < \frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$

On suppose donc dans cette partie que $2 \leq m < \frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$ et nous pourrions donc utiliser le lemme 2.3.5. Rappelons l'inégalité (2.3.1)

$$\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + b + (\#\mathcal{L}_A - 1) \lambda(B_M) + (\#\mathcal{L}_B - 1) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right),$$

et donc avec les lemmes 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5, et l'hypothèse $\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)b$, on obtient

$$\begin{aligned} (K + \delta + \varepsilon)b &\geq b + Km \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} \right) \frac{1 - \varepsilon}{m} b - \frac{1 - \varepsilon}{m} b \\ &\quad + m \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right). \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant le corollaire 2.2.1, on a

$$\begin{aligned} (K + \delta + \varepsilon) &\geq 1 + K \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} - \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} \right) \right) - \frac{1 - \varepsilon}{m} \\ &\quad + m \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \left(\frac{\delta - K(\log(K) - 1)\varepsilon}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} \right) \\ &\geq 1 + K \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} - \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} \right) \right) - \frac{1 - \varepsilon}{m} \\ &\quad + \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) (\delta - K(\log(K) - 1)\varepsilon - f(\varepsilon, K)). \end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned}
0 &\geq 1 - K \left(\frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} + \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} \right) \right) - \frac{1 - \varepsilon}{m} \\
&\quad - \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) (K (\log(K) - 1) \varepsilon + f(\varepsilon, K)) - \delta \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} - \varepsilon \\
&\geq 1 - K \left(\frac{\varepsilon_K^2}{f(\varepsilon, K)} + \varepsilon \right) - \frac{1 - \varepsilon}{m} - (K (\log(K) - 1) \varepsilon + f(\varepsilon, K)) - \delta \varepsilon - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi par (1.2.6)

$$K \left(\frac{K\varepsilon}{f(\varepsilon, K)} + \varepsilon \right) + K (\log(K) - 1) \varepsilon + f(\varepsilon, K) + \delta \varepsilon + \varepsilon \geq 1 - \frac{1}{m},$$

et comme on a supposé $m \geq 2$

$$K \left(\frac{K\varepsilon}{f(\varepsilon, K)} + \varepsilon \right) + K (\log(K) - 1) \varepsilon + f(\varepsilon, K) + \delta \varepsilon + \varepsilon \geq \frac{1}{2}.$$

Pour aboutir à une absurdité, on voudrait que le terme de gauche soit le plus petit possible, ce qui nous conduit à choisir $f(\varepsilon, K) = \sqrt{\varepsilon}K$ (ce qui ne pose pas de souci, cf. remarque 2.3.2). On obtient alors

$$\varepsilon (K \log K + \delta + 1) + 2K\sqrt{\varepsilon} \geq \frac{1}{2}. \quad (2.3.12)$$

Or d'autre part, $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K} \right)^3$ par l'hypothèse (1.0.2), donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon (K \log K + \delta + 1) + 2K\sqrt{\varepsilon} &< \left(\frac{\delta}{3K} \right)^3 (K \log K + \delta + 1) + 2K \left(\frac{\delta}{3K} \right)^{3/2} \\
&< \frac{K \log K + 2}{27K^3} + \frac{2}{3\sqrt{3K}} \\
&< \frac{1}{2} \quad \text{quel que soit } K \geq 2,
\end{aligned}$$

ce qui contredit (2.3.12) et nous donne donc l'absurdité. On ne peut donc pas avoir $m \geq 2$ et donc nécessairement $m = 1$.

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{cK^2}$, où c est une certaine constante inférieure à 9.

2.3.4 Le cas $m \geq \frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$ est impossible

On suppose donc ici que m est supérieur ou égal à $\frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$ et on pourra donc utiliser le lemme 2.3.6. Rappelons l'inégalité (2.3.1)

$$\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + b + (\#\mathcal{L}_A - 1) \lambda(B_M) + (\#\mathcal{L}_B - 1) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right),$$

donc avec les lemmes 2.3.3, 2.3.4, 2.3.6, et l'hypothèse $\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)b$, on obtient

$$(K + \delta + \varepsilon)b \geq b + Km \left(1 - \frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - K\varepsilon \left(\frac{1}{g(\varepsilon, K)} - \frac{b}{\mu(I_K)} \right) \right) \frac{1 - \varepsilon}{m} b - \frac{1 - \varepsilon}{m} b \\ + m \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \left(\frac{\mu(I_K)}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} b \right).$$

Ainsi en utilisant les corollaires 2.2.1 puis 2.2.2, on a

$$(K + \delta + \varepsilon) \geq 1 + K(1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - \frac{K\varepsilon}{g(\varepsilon, K)} + \frac{K\varepsilon b}{\mu(I_K)} \right) - \frac{1 - \varepsilon}{m} \\ + m \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \left(\frac{\delta - K(\log(K) - 1)\varepsilon}{m} - \frac{f(\varepsilon, K)}{m} \right) \\ \geq 1 + K(1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} - \frac{K\varepsilon}{g(\varepsilon, K)} + \frac{K\varepsilon}{\delta + 2\varepsilon} \right) - \frac{1 - \varepsilon}{m} \\ + \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) (\delta - K(\log(K) - 1)\varepsilon - f(\varepsilon, K)).$$

Finalement, on a donc

$$0 \geq 1 - K(1 - \varepsilon) \left(\frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} + \frac{K\varepsilon}{g(\varepsilon, K)} - \frac{K\varepsilon}{\delta + 2\varepsilon} \right) - \frac{1 - \varepsilon}{m} \\ - \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) (K(\log(K) - 1)\varepsilon + f(\varepsilon, K)) - \delta \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} - \varepsilon \\ \geq 1 - K(1 - \varepsilon) \left(\frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} + \frac{K\varepsilon}{g(\varepsilon, K)} - \frac{K\varepsilon}{\delta + 2\varepsilon} \right) - \frac{1 - \varepsilon}{m} \\ - (K(\log(K) - 1)\varepsilon + f(\varepsilon, K)) - \delta\varepsilon - \varepsilon.$$

Ainsi

$$K(1 - \varepsilon) \left(\frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} + \frac{K\varepsilon}{g(\varepsilon, K)} - \frac{K\varepsilon}{\delta + 2\varepsilon} \right) + K(\log(K) - 1)\varepsilon + f(\varepsilon, K) + \delta\varepsilon + \varepsilon \geq 1 - \frac{1 - \varepsilon}{m},$$

et comme on a supposé $m \geq \frac{\mu(I_K)}{\varepsilon_K^2 b}$, on a

$$1 - \frac{1 - \varepsilon}{m} \geq 1 - (1 - \varepsilon) \frac{\varepsilon_K^2 b}{\mu(I_K)} \geq 1 - (1 - \varepsilon) \frac{K\varepsilon}{\delta + 2\varepsilon},$$

où la dernière inégalité provient de (1.2.6) et du corollaire 2.2.2. Ainsi

$$K(1 - \varepsilon) \left(\frac{g(\varepsilon, K)}{f(\varepsilon, K)} + \frac{K\varepsilon}{g(\varepsilon, K)} \right) - (K - 1)(1 - \varepsilon) \frac{K\varepsilon}{\delta + 2\varepsilon} + K(\log(K) - 1)\varepsilon + f(\varepsilon, K) + \delta\varepsilon + \varepsilon \geq 1.$$

Pour aboutir à une absurdité, on voudrait que le terme de gauche soit le plus petit possible, ce qui nous conduit à choisir $f(\varepsilon, K) = K\varepsilon^{1/3}$ et $g(\varepsilon, K) = K\varepsilon^{2/3}$.

Remarque 2.3.8. *On peut faire ce choix car on a bien pour tout $K \geq 2$ et tout $\varepsilon > 0$*

- $g(\varepsilon, K) < f(\varepsilon, K)$.
- $\mu(I_K) - f(\varepsilon, K) > 0$, cf. remarque 2.3.2.

De cette manière on a

$$3K\varepsilon^{1/3}(1-\varepsilon) - (K-1)(1-\varepsilon)\frac{K\varepsilon}{\delta+2\varepsilon} + K(\log(K)-1)\varepsilon + \delta\varepsilon + \varepsilon \geq 1. \quad (2.3.13)$$

C'est cette équation qui va nous amener à l'absurdité. Commençons par voir que

$$-(K-1)(1-\varepsilon)\frac{K\varepsilon}{\delta+2\varepsilon} + K(\log(K)-1)\varepsilon + \delta\varepsilon + \varepsilon \leq 0.$$

Comme $\varepsilon > 0$, il suffit de voir que $1 + \delta + K \log K - K - (K-1)(1-\varepsilon)\frac{K}{\delta+2\varepsilon}$ est négatif.

Or par l'hypothèse (1.0.3), on a $\varepsilon < \frac{1-\delta}{K \log K + 3}$. De plus

$$\frac{1-\delta}{K \log K + 3} < \frac{1-\delta}{K} \leq \frac{1-\delta}{2},$$

par la remarque 1.0.1. Ainsi

$$\begin{aligned} & 1 + \delta + K \log K - K - (K-1)(1-\varepsilon)\frac{K}{\delta+2\varepsilon} \\ & \leq 1 + \delta + K \log K - K - (1-\varepsilon)(K-1)K \\ & \leq 1 + \delta + K(\log K - 1 - (1-\varepsilon)(K-1)) \\ & \leq K(\log K - K + \varepsilon(K-1) + 1), \end{aligned}$$

car $1 + \delta \leq 2 \leq K$ par la remarque 1.0.1. Enfin l'hypothèse (1.0.2) implique $\varepsilon \leq \frac{K - \log K - 1}{K - 1}$ donc $K(\log K - K + \varepsilon(K-1) + 1) \leq 0$ et finalement $1 + \delta + K \log K - K - (K-1)(1-\varepsilon)\frac{K}{\delta+2\varepsilon}$ est bien négatif. Avec (2.3.13), on obtient

$$3K\varepsilon^{1/3}(1-\varepsilon) \geq 1.$$

$$\text{Nous avons eu besoin de } \varepsilon < \frac{1-\delta}{2} \text{ et } \varepsilon < \frac{K - \log K - 1}{K - 1}.$$

Enfin $3K\varepsilon^{1/3}(1-\varepsilon) \geq 1$ implique $\varepsilon \geq \frac{1}{(3K)^3}$ ce qui contredit l'hypothèse (1.0.2) et nous donne une absurdité.

$$\text{Nous avons eu besoin de } \varepsilon < \frac{1}{(3K)^3}.$$

Ainsi $m = 1$, et donc B est inclus dans un intervalle de \mathbb{T} . Comme il contient 0, nous connaissons la structure de B dans \mathbb{R} :

$$B = B_0 \sqcup B_1,$$

où $B_0 \subseteq [0, b_+]$, $B_1 \subseteq [1 - b_-, 1]$, $\{b_+, 1 - b_-\} \subset B$ et $b_+ + b_- \leq b + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 b$.

Voici un exemple de ce à quoi peut ressembler B :



D'après (1.2.6), en particulier on a $\min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 b \leq \varepsilon b$ et donc

$$b_+ + b_- \leq b + \varepsilon b \tag{2.3.14}$$

$$b_+ \leq \lambda(B_0) + \varepsilon b \tag{2.3.15}$$

et

$$b_- \leq \lambda(B_1) + \varepsilon b. \tag{2.3.16}$$

Étape 3

Structure principale de A

Comme conclu précédemment, on a

$$B = B_0 \sqcup B_1,$$

où $B_0 \subseteq [0, b_+]$, $B_1 \subseteq [1 - b_-, 1]$, $b_+, 1 - b_- \in B$ et $b_+ + b_- \leq b + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 b$. De même, \tilde{A}_K est inclus dans un intervalle de \mathbb{T} , qui lui, ne contient pas 0 (cf. (2.1.7)). Ainsi

$$\tilde{A}_K \subseteq [i_K^-, i_K^+],$$

où $\{i_K^-, i_K^+\} \subset \tilde{A}_K$, et $i_K^+ - i_K^- = \mu(I_K) \leq \mu(\tilde{A}_K) + \varepsilon_K^2 b$ (on a choisi I_K comme l'intervalle minimal contenant \tilde{A}_K cf. page 46).

On rappelle que \mathcal{L}_A est défini par

$$\mathcal{L}_A = \{l \geq 0 \mid A_l \neq \emptyset\},$$

pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,

$$\Omega(\tilde{A}_k) = \{i \in \mathcal{L}_A \mid (A_i \bmod 1) \cap \tilde{A}_k \neq \emptyset\},$$

et pour tout $x \in \tilde{A}_k$, $\mathcal{L}_x = \{n \in \mathbb{N} \mid n + x \in A\}$. Commençons par un lemme général.

Lemme 3.0.1. *Pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$ mesurable et borné, on a*

$$\lambda(E + \{0, 1\}) \geq \lambda(E) + \mu(\pi(E)).$$

Preuve. Si E est un ensemble borné de réels et $x \in [0, 1[$, on définit

$$\mathcal{L}_x^E = \{n \in \mathbb{N} \mid n + x \in E\}.$$

(On a ainsi $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_x^A$). Comme pour $k \geq 2$, $\#\mathcal{L}_x^E \geq k - 1$ implique $\#\mathcal{L}_x^{E+\{0,1\}} \geq k$ et

comme $\pi(E + \{0, 1\}) = \pi(E)$, on a d'après le lemme 1.0.2

$$\begin{aligned}
\lambda(E + \{0, 1\}) &= \sum_{k \geq 1} \mu \left(\{x \in \pi(E + \{0, 1\}) \mid \#\mathcal{L}_x^{E+\{0,1\}} \geq k\} \right) \\
&= \sum_{k \geq 1} \mu \left(\{x \in \pi(E) \mid \#\mathcal{L}_x^{E+\{0,1\}} \geq k\} \right) \\
&\geq \mu \left(\{x \in \pi(E) \mid \#\mathcal{L}_x^{E+\{0,1\}} \geq 1\} \right) + \sum_{k \geq 2} \mu \left(\{x \in \pi(E) \mid \#\mathcal{L}_x^{E+\{0,1\}} \geq k\} \right) \\
&\geq \mu \left(\{x \in \pi(E) \mid \#\mathcal{L}_x^{E+\{0,1\}} \geq 1\} \right) + \sum_{k \geq 1} \mu \left(\{x \in \pi(E) \mid \#\mathcal{L}_x^E \geq k\} \right) \\
&\geq \mu \left(\pi(E + \{0, 1\}) \right) + \lambda(E) \\
&\geq \mu \left(\pi(E) \right) + \lambda(E).
\end{aligned}$$

□

Nous avons désormais tout en main pour pouvoir dégager la structure globale de A . On a $\tilde{A}_K \subseteq [i_K^-, i_K^+]$, où $\{i_K^-, i_K^+\} \subset \tilde{A}_K$ et $i_K^+ - i_K^- = \mu(I_K) \leq \mu(\tilde{A}_K) + \varepsilon_K^2 b$. Nous allons commencer par déterminer l'emplacement des éléments de A formant \tilde{A}_K . On connaît bien \tilde{A}_K mais on ne sait pas à quels "étages" il s'exprime dans A . (Ici, on appelle "étage", tout segment entre deux entiers consécutifs). Par définition, chaque élément de \tilde{A}_K s'exprime dans K étages différents de A mais quels sont-ils ? Et sont-ils les mêmes pour tous les éléments de \tilde{A}_K ? La réponse à ces questions constituera la première étape de la recherche de la structure globale de A .

Dans un second temps, nous résoudrons les mêmes questions pour \tilde{A}_{K-1} , puis pour tous les ensembles \tilde{A}_k jusque $k = 1$ afin d'obtenir la structure globale de A .

3.1 Étape 0 : contribution de \tilde{A}_K dans A

Lemme 3.1.1. *Il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\Omega(\tilde{A}_K) = \llbracket a, a + K - 1 \rrbracket.$$

Preuve. Soit $x \in \tilde{A}_K$. On a $\tilde{A}_K \subseteq [i_K^-, i_K^+]$, où $i_K^+ - i_K^- = \mu(I_K) \leq \mu(\tilde{A}_K) + \varepsilon_K^2 b$. Donc il existe $y \in \tilde{A}_K$ tel que $y \neq x$ et $|x - y| \leq \varepsilon_K^2 b$. Soit un tel y et supposons sans perdre en généralité que $x < y$. Soit $l \in (\mathcal{L}_x \cup \mathcal{L}_y)$, on a d'un côté

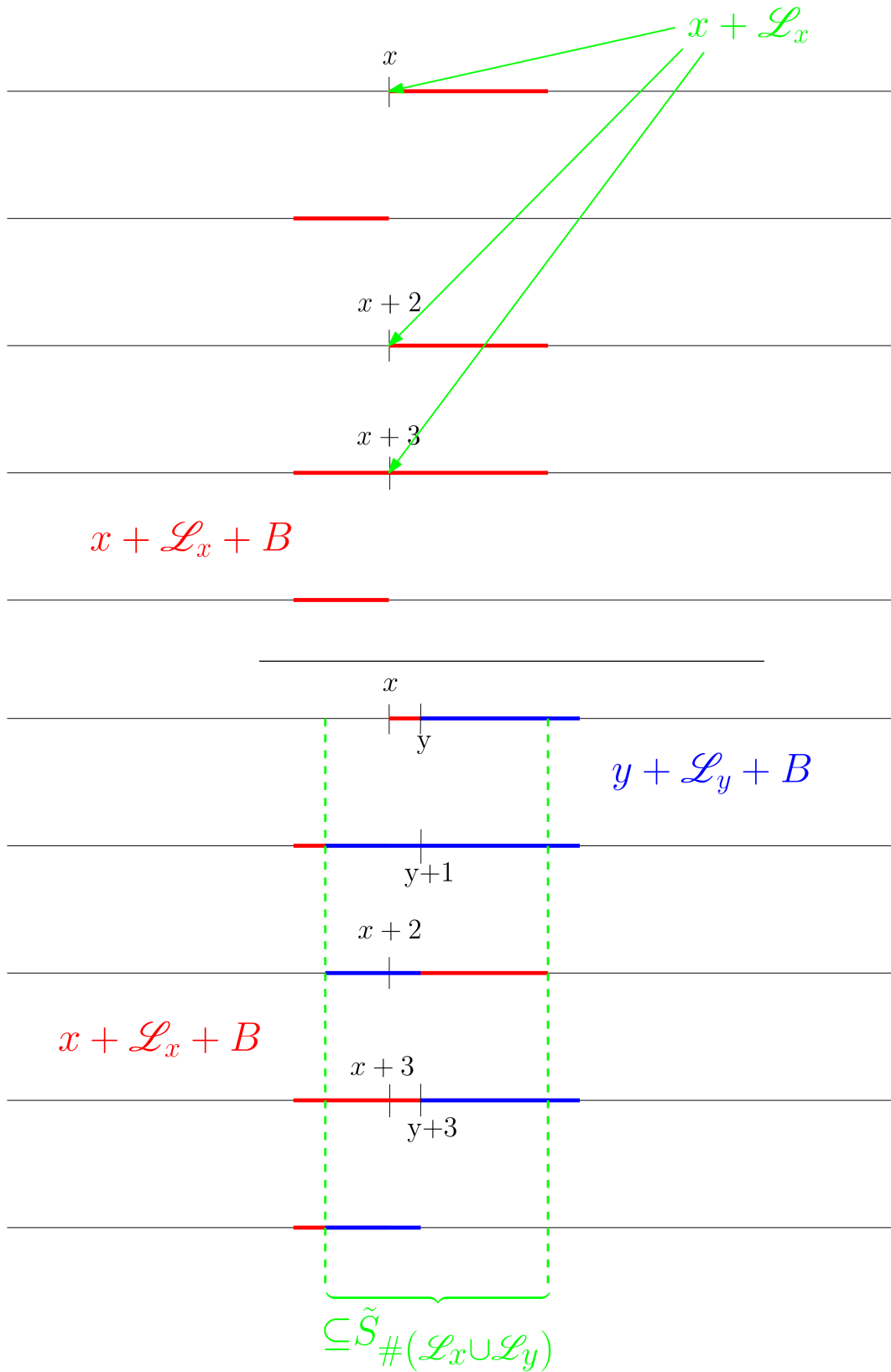
$$\mu((l + [y, x + b_+]) \cap S_l) \geq -(y - x) + \mu(B_0),$$

et de l'autre,

$$\mu((1 + l + [y - b_-, x]) \cap S_{l+1}) \geq -(y - x) + \mu(B_1).$$

Notons que le fait que les segments puissent être vides ou que les membres de droite puissent être négatifs ne pose pas de problème pour la suite de l'argumentation. Ainsi

$$\mu(\tilde{S}_{\#(\mathcal{L}_x \cup \mathcal{L}_y)}) \geq -(y - x) + \mu(B_0) - (y - x) + \mu(B_1) \geq b - 2(y - x) \geq b - 2\varepsilon_K^2 b.$$



Or d'après (1.2.1) et le lemme 1.2.1, on a

$$\mu(\tilde{S}_{K+1}) = \mu(\tilde{A}_K) + \varepsilon_K^1 b = \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k (\varepsilon_{k+1}^1 - \varepsilon_{k+1}^2) b + \varepsilon_K^1 b.$$

Ainsi

$$\mu\left(\tilde{S}_{\#(\mathcal{L}_x \cup \mathcal{L}_y)}\right) - \mu\left(\tilde{S}_{K+1}\right) \geq \left(1 - \delta - \frac{K+1}{K}\varepsilon_K^2 - \varepsilon_K^1 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k\varepsilon_{k+1}^1\right)b. \quad (3.1.1)$$

Or par (1.2.2), (1.2.5) et (1.2.6)

$$\begin{aligned} \frac{K+1}{K}\varepsilon_K^2 + \varepsilon_K^1 + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k\varepsilon_{k+1}^1 &= \varepsilon_K^2 + \varepsilon_K^1 + \frac{1}{K}\left(\varepsilon_K^2 + \sum_{k=1}^{K-1} k\varepsilon_{k+1}^1\right) \\ &\leq \left(K + \frac{K}{K-1} + 1\right)\varepsilon \leq (K+3)\varepsilon. \end{aligned}$$

De plus par l'hypothèse (1.0.3), on a $\varepsilon < \frac{1-\delta}{K+3}$ pour tout $K \geq 3$ donc quel que soit $K \geq 3$, (3.1.1) donne

$$\mu\left(\tilde{S}_{\#(\mathcal{L}_x \cup \mathcal{L}_y)}\right) - \mu\left(\tilde{S}_{K+1}\right) > 0.$$

Aussi, si $K = 2$ l'inégalité (3.1.1) devient

$$\mu\left(\tilde{S}_{\#(\mathcal{L}_x \cup \mathcal{L}_y)}\right) - \mu\left(\tilde{S}_3\right) \geq \left(1 - \delta - \frac{1}{2}(\varepsilon_2^1 - \varepsilon_2^2) - \varepsilon_2^1 - 2\varepsilon_2^2\right)b \geq \left(1 - \delta - \frac{3}{2}(\varepsilon_2^1 - \varepsilon_2^2)\right)b,$$

et d'après (1.2.2) avec $K = 2$, on a $\varepsilon \geq \frac{1}{2}(\varepsilon_2^1 - \varepsilon_2^2)$, d'où par

$$\mu\left(\tilde{S}_{\#(\mathcal{L}_x \cup \mathcal{L}_y)}\right) - \mu\left(\tilde{S}_3\right) \geq (1 - \delta - 3\varepsilon)b,$$

et donc $\mu\left(\tilde{S}_{\#(\mathcal{L}_x \cup \mathcal{L}_y)}\right) - \mu\left(\tilde{S}_3\right) > 0$, toujours par l'hypothèse (1.0.3). Ainsi quel que soit $K \geq 2$, on a

$$\mu\left(\tilde{S}_{\#(\mathcal{L}_x \cup \mathcal{L}_y)}\right) > \mu\left(\tilde{S}_{K+1}\right),$$

et donc $\#(\mathcal{L}_x \cup \mathcal{L}_y) \leq K$. Mais $x, y \in \tilde{A}_K$ donc $\#\mathcal{L}_x \geq K$ et $\#\mathcal{L}_y \geq K$. Donc

$$\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_y =: \mathcal{L},$$

et de proche en proche, on obtient $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}$ quelque soit $x \in \tilde{A}_K$. Comme $0, 1 \in B$, $l + \tilde{A}_K \subseteq S_l$ et $l + 1 + \tilde{A}_K \subseteq S_{l+1}$ quel que soit $l \in \mathcal{L}$, alors

$$\mu\left(\tilde{S}_{\#(\mathcal{L} \cup (\mathcal{L}+1))}\right) \geq \mu\left(\tilde{A}_K\right).$$

D'autre part

$$\mu\left(\tilde{S}_{K+2}\right) = \varepsilon_{K+2}^3 b < \mu\left(\tilde{A}_K\right),$$

d'où $\#(\mathcal{L} \cup (\mathcal{L} + 1)) \leq K + 1 = \#\mathcal{L} + 1$, ce qui implique que \mathcal{L} est composé d'entiers consécutifs. Et donc finalement, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que

$$\Omega\left(\tilde{A}_K\right) = \llbracket a, a + K - 1 \rrbracket.$$

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1-\delta}{K+2+1/K}$ si $K \geq 3$ et de $\varepsilon < \frac{1-\delta}{3}$ si $K = 2$.

□

Nous venons de montrer que $\llbracket a, a + K - 1 \rrbracket + \tilde{A}_K \subset A$. Afin de traduire sur A et S les informations dont nous disposons sur $\{\tilde{A}_k\}$ et $\{\tilde{S}_k\}$, nous définissons les "projetés inverses" π_A^{-1} et π_S^{-1} comme suit : Pour tout sous-ensemble E de \mathbb{T} on pose

$$\pi_A^{-1}(E) = \{x \in A \mid x \bmod 1 \in E\},$$

et

$$\pi_S^{-1}(E) = \{x \in S \mid x \bmod 1 \in E\}.$$

Avec ces définitions, on a directement

$$\lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_K)) = K\mu(\tilde{A}_K), \quad (3.1.2)$$

et avec le lemme 3.1.1

$$\lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_K) + \{0, 1\}) = (K + 1)\mu(\tilde{A}_K). \quad (3.1.3)$$

Ces égalités sont claires car $K = K_A$ mais pour tout entier $k \in \{1, \dots, K - 1\}$, l'égalité devient

$$\lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)) = k\mu(\tilde{A}_k) + \sum_{l=k+1}^K l\mu(\tilde{A}_l). \quad (3.1.4)$$

Preuve. $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)$ est l'ensemble des éléments de A qui se répètent au moins k fois modulo 1, c'est donc la réunion disjointe, pour l variant de k à K_A , des ensembles des éléments de A qui se répètent exactement l fois modulo 1. La mesure de l'ensemble des éléments de A qui se répètent exactement l fois modulo 1 est égale à $l\mu(\tilde{A}_l \setminus \tilde{A}_{l+1})$, et ainsi on a

$$\begin{aligned} \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)) &= \sum_{l=k}^{K_A} l\mu(\tilde{A}_l \setminus \tilde{A}_{l+1}) \\ &= \sum_{l=k}^{K_A} l\mu(\tilde{A}_l) - \sum_{l=k}^{K_A} l\mu(\tilde{A}_{l+1}) \\ &= k\mu(\tilde{A}_k) + \sum_{l=k+1}^{K_A} l\mu(\tilde{A}_l), \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule car $K_A = K$ (cf. paragraphe 1.1 page 32). □

De même, pour tout entier $k \geq 1$, on a la formule

$$\lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)) = k\mu(\tilde{S}_k) + \sum_{i=k+1}^{K+1} \mu(\tilde{S}_i) + \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b. \quad (3.1.5)$$

Preuve. Il suffit de suivre le même procédé puis d'utiliser (1.2.4)

$$\begin{aligned} \lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)) &= k(\mu(\tilde{S}_k) - \mu(\tilde{S}_{k+1})) + \dots + (K_S - 1)(\mu(\tilde{S}_{K_S-1}) - \mu(\tilde{S}_{K_S})) + K_S\mu(\tilde{S}_{K_S}) \\ &= k\mu(\tilde{S}_k) + \mu(\tilde{S}_{k+1}) + \dots + \mu(\tilde{S}_{K_S}) \\ &= k\mu(\tilde{S}_k) + \sum_{i=k+1}^{K+1} \mu(\tilde{S}_i) + \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons écrire $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)$ sous différentes formes

$$\begin{aligned}\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) &= \{x \in A \mid x \bmod 1 \in \tilde{A}_k\} \\ &= \{x \in A \mid \#\left(\{x + \mathbb{N}\} \cap A\right) \geq k\} \\ &= \{x + \mathcal{L}_x \mid x \in \tilde{A}_k\},\end{aligned}$$

et donc en particulier on a

$$\pi_A^{-1}(\tilde{A}_K) = \llbracket a, a + K - 1 \rrbracket + \tilde{A}_K.$$

Nous savons donc exactement où se trouvent les éléments de A qui forment \tilde{A}_K . On voudrait de même déterminer la position des éléments de A formant \tilde{A}_{K-1} puis dire où se trouvent ceux formant \tilde{A}_{K-2} et descendre ainsi jusqu'aux éléments formant \tilde{A}_1 ce qui achèverait la description complète de A . Cependant des difficultés apparaissent dès l'étape suivante, qui consiste à décrire $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-1})$. En effet, $\tilde{A}_K + B$ et \tilde{A}_{K-1} ne remplissant ni l'un ni l'autre tout à fait \tilde{S}_K (cf. (1.2.1) à la page 34), il peut exister un ensemble exceptionnel d'éléments de $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-1})$ qui ont un comportement différent des autres (ne se trouvent pas aux mêmes "étages" ou un peu plus loin..). Cet ensemble exceptionnel est nécessairement petit et proche de la structure principale (la structure formée par la grande majorité des éléments de $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-1})$ qui ont un comportement uniforme) car les erreurs entre $\tilde{A}_K + B$ et \tilde{S}_K et entre \tilde{A}_{K-1} et \tilde{S}_K , sont minimales ce qui ne laisse pas assez de place (au niveau des mesures) pour faire de gros écarts. En fait, on peut même décrire de manière assez précise où peuvent se situer ces petits écarts. Seulement, ces différents petits écarts possibles pour $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-1})$ entraînent plusieurs cas de figure pour les écarts possibles de $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-2})$ qui eux-mêmes entraînent plusieurs cas de figure pour les écarts possibles de $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-3})$... etc. De cette manière il est donc assez difficile de dégager une structure claire pour A . Nous allons donc commencer par décrire la structure principale de $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-1})$ en omettant volontairement les éléments s'échappant un peu de cette structure. Pour cela, nous allons définir un ensemble idéal que nous appellerons A'_{K-1} et montrerons que $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-1}) \setminus \pi_A^{-1}(\tilde{A}_K)$ est très proche de cet ensemble idéal. Ensuite, de même, nous montrerons que $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-2}) \setminus \pi_A^{-1}(\tilde{A}_{K-1})$ est très proche d'un ensemble idéal A'_{K-2} et ainsi de suite jusqu'à un certain ensemble idéal A'_1 . Finalement nous obtiendrons donc que A est très proche d'un ensemble facile à décrire A' (ce sera une réunion d'intervalles) et dégagerons ainsi la structure principale de A . À partir de cette structure principale de A , il sera beaucoup plus aisé de situer les derniers éléments de A et donc décrire sa structure totale (ce qui fera l'objet de la dernière partie de la preuve).

3.2 Stratégie et Étape 1 : $k = K$

Écrivons

$$A = \bigsqcup_{k=1}^K \tilde{A}_k,$$

où $\dot{A}_K = \pi_A^{-1}(\tilde{A}_K) = \llbracket a, a + K - 1 \rrbracket + \tilde{A}_K$ et quelque soit $k \in \{1, \dots, K - 1\}$

$$\dot{A}_k = \pi_A^{-1}(\tilde{A}_k \setminus \tilde{A}_{k+1}).$$

Remarque 3.2.1. Comme défini dans le paragraphe Notations, \dot{A}_k est aussi l'ensemble des éléments x de A tels que $\#\mathcal{L}_x = k$

$$\dot{A}_k = \{x \in A \mid \#\mathcal{L}_x = k\} = \pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) \setminus \pi_A^{-1}(\tilde{A}_{k+1}).$$

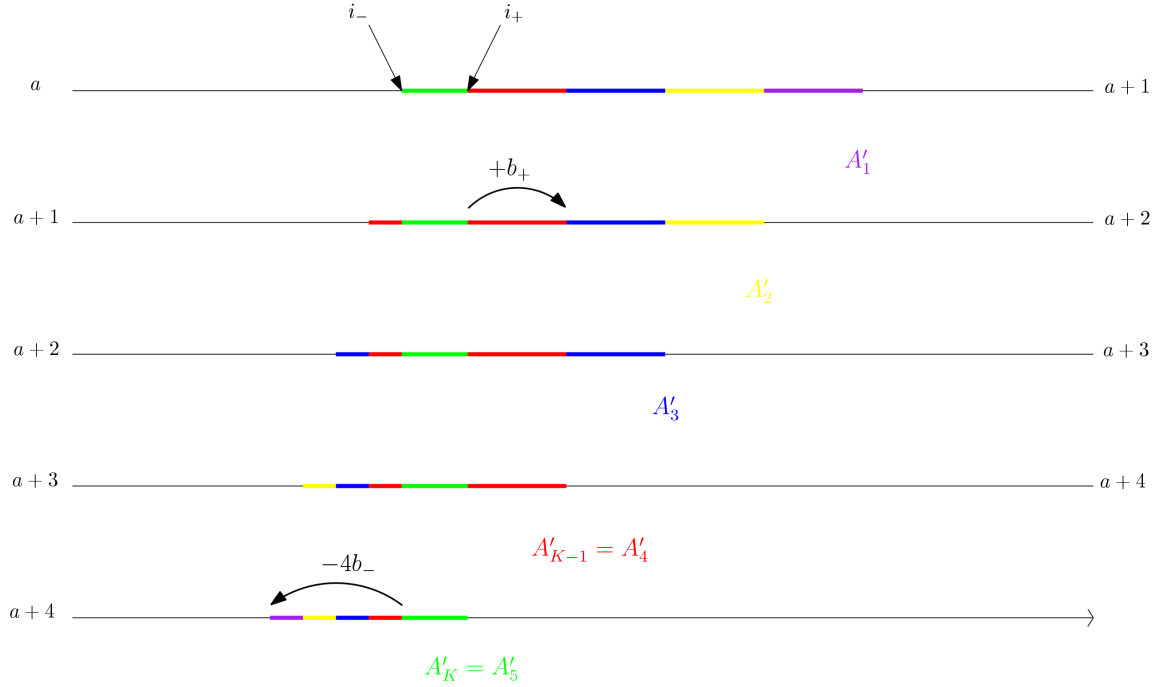
Nous allons comparer A à l'ensemble A' défini par

$$A' = \bigsqcup_{k=1}^K A'_k,$$

où $A'_K = \llbracket a, a + K - 1 \rrbracket + I_K$, et pour tout $k \in \{1, \dots, K - 1\}$

$$A'_k = \left(\llbracket a, a + k - 1 \rrbracket + I_K + (K - k) \left([0, b_+] \sqcup [1 - b_-, 1] \right) \right) \setminus A'_{k+1}.$$

Voici une représentation de A' pour $K = 5$:



A'_K est I_K au K étages de $\Omega(\tilde{A}_K)$, puis pour tout $k < K$, A'_{k-1} est l'ajout de $[0, b_+]$ à droite de chacun des $k - 1$ premiers étages de A'_k et de $[-b_-, 0]$ à gauche de chacun des $k - 1$ derniers étages de A'_k .

Pour comparer A et A' , nous montrerons que pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, A'_k et \dot{A}_k sont très proches. Tout d'abord, on a $\tilde{A}_K \subseteq I_K$ et $\Omega(\tilde{A}_K) = \llbracket a, a + K - 1 \rrbracket$ donc $\dot{A}_K \subseteq A'_K$ et donc

$$\lambda(A'_K \cap \dot{A}_K) = \lambda(\dot{A}_K), \quad (3.2.1)$$

de plus $\mu(I_K) \leq \mu(\tilde{A}_K) + \varepsilon_K^2 b$ donc

$$\lambda(A'_K \setminus \dot{A}_K) \leq K \varepsilon_K^2 b.$$

Pour les autres indices, le raisonnement sera similaire bien que plus technique.

3.3 Étapes suivantes.

Soit $k \in \{2, \dots, K\}$, on a

$$A_{k-1}^\cdot = \pi_A^{-1}(\tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{A}_k),$$

et

$$A'_{k-1} = \left(\llbracket a, a+k-2 \rrbracket + I_K + (K-k+1) \left([0, b_+] \sqcup [1-b_-, 1] \right) \right) \setminus A'_k.$$

Pour montrer que ces deux ensembles sont proches, nous commençons par montrer que $A_{k-1}^{\ddot{\cdot}} = A_{k-1}^\cdot + \{0, 1\}$ est proche de

$$\begin{aligned} A''_{k-1} &= A'_{k-1} + \{0, 1\} \\ &= \left(\llbracket a, a+k-1 \rrbracket + I_K + (K-k+1) \left([0, b_+] \sqcup [1-b_-, 1] \right) \right) \setminus (A'_k + \{0, 1\}) \\ &= \left(A'_k + \left([0, b_+] \sqcup [1-b_-, 1] \right) \right) \setminus (A'_k + \{0, 1\}). \end{aligned}$$

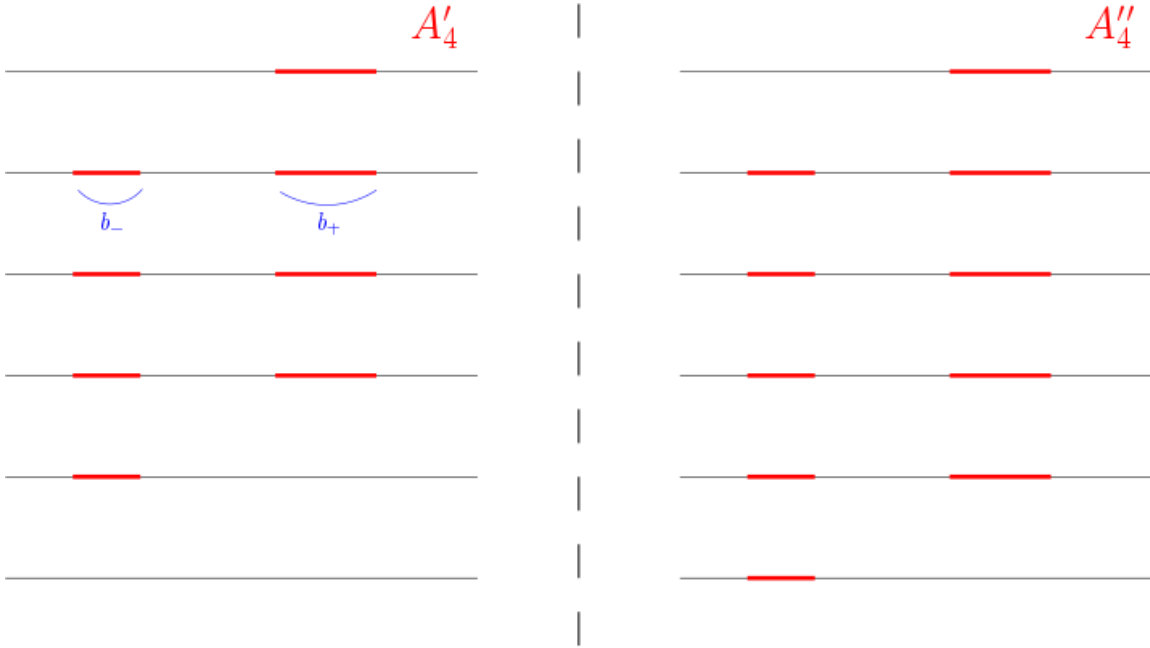
En effet, (1.2.1) impliquera que chacun de ces deux ensembles est proche de $\dot{S}_k = \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k \setminus \tilde{S}_{k+1})$. Nous allons donc contrôler $\lambda(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}} \cap \dot{S}_k)$ puis $\lambda(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k)$ pour pouvoir contrôler $\lambda\left(\left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k\right) \cap \left(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}} \cap \dot{S}_k\right)\right)$ et finalement $\lambda\left(A'_{k-1} \cap A_{k-1}^\cdot\right)$.

Remarque 3.3.1. *Les ensembles $A_{k-1}^{\ddot{\cdot}}$ et A''_{k-1} sont les ensembles A_{k-1}^\cdot et A'_{k-1} auxquels on a ajouté un "étage".*

$$A_{k-1}^{\ddot{\cdot}} = A_{k-1}^\cdot + \{0, 1\},$$

et

$$A''_{k-1} = A'_{k-1} + \{0, 1\}.$$



Il est possible que des éléments de A_{k-1}^\cdot ne se répètent pas que sur des étages consécutifs et que donc A_{k-1}^\cdot ajoute des éléments aux étages intermédiaires mais en comparant A_{k-1}^\cdot et A_{k-1}'' nous allons justement voir que la grande majorité des éléments sont aux étages consécutifs attendus.

Lors des première et troisième étapes, nous utilisons le fait que si E et F sont deux ensembles bornés tous deux inclus dans H (borné également) alors

$$\lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F) - \lambda(E \cup F) \geq \lambda(E) + \lambda(F) - \lambda(H). \quad (3.3.1)$$

1. Minoration de $\lambda(A_{k-1}^\cdot \cap \dot{S}_k)$:

Comme $0, 1 \in B$ on a $A_{k-1}^\cdot = A_{k-1}^\cdot + \{0, 1\} \subseteq \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)$. De plus par définition

$$A_{k-1}^\cdot = \pi_A^{-1}(\tilde{A}_{k-1}) \setminus \pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) = (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{A}_k)),$$

donc $(A_{k-1}^\cdot + \mathbb{N}) \cap (\tilde{A}_k + \mathbb{N}) = \emptyset$, ainsi $A_{k-1}^\cdot \cap (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\}) = \emptyset$ (car $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\} \subset \tilde{A}_k + \mathbb{N}$), d'où

$$A_{k-1}^\cdot \subseteq \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k) \setminus (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\}).$$

L'idée ici est d'utiliser (3.3.1), et de choisir $H = \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k) \setminus (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\})$, $E = A_{k-1}^\cdot$ et $F = \dot{S}_k$. Il reste à vérifier que \dot{S}_k est bien inclus dans $\pi_S^{-1}(\tilde{S}_k) \setminus (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\})$. C'est le cas car par définition $\dot{S}_k = \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k) \setminus \pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})$, et comme $0, 1 \in B$, on a $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\} \subseteq \pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})$ et donc

$$\dot{S}_k \subseteq \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k) \setminus (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\}).$$

D'après (3.3.1), on a

$$\lambda(A_{k-1}^\cdot \cap \dot{S}_k) \geq \lambda(A_{k-1}^\cdot) + \lambda(\dot{S}_k) - \lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_k) \setminus (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\})).$$

Maintenant $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\} \subseteq \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)$, donc

$$\lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_k) \setminus (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\})) = \lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)) - \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\}).$$

Ainsi

$$\lambda(A_{k-1}^\cdot \cap \dot{S}_k) \geq \lambda(A_{k-1}^\cdot) + \lambda(\dot{S}_k) - \lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)) + \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\}),$$

et par le lemme 3.0.1

$$\lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\}) \geq \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)) + \mu(\tilde{A}_k),$$

donc

$$\lambda(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}} \cap \dot{S}_k) \geq \lambda(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}}) + \lambda(\dot{S}_k) - \left(\lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)) - \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)) \right) + \mu(\tilde{A}_k).$$

De plus (3.1.4) et (3.1.5) impliquent

$$\begin{aligned} & \lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)) - \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)) \\ &= k\mu(\tilde{S}_k) + \sum_{i=k+1}^{K+1} \mu(\tilde{S}_i) + \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b - k\mu(\tilde{A}_k) - \sum_{i=k+1}^K \mu(\tilde{A}_i) \\ &= \sum_{i=k}^K (\mu(\tilde{S}_{i+1}) - \mu(\tilde{A}_i)) + k\mu(\tilde{S}_k) + \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b - (k-1)\mu(\tilde{A}_k), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}} \cap \dot{S}_k) &\geq \lambda(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}}) + \lambda(\dot{S}_k) + k\mu(\tilde{A}_k) - \sum_{i=k}^K (\mu(\tilde{S}_{i+1}) - \mu(\tilde{A}_i)) - k\mu(\tilde{S}_k) \\ &\quad - \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b. \end{aligned}$$

Aussi $\mu(\tilde{S}_{i+1}) - \mu(\tilde{A}_i) = \varepsilon_{i+1}^1 b$ d'après (1.0.6), donc

$$\lambda(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}} \cap \dot{S}_k) \geq \lambda(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}}) + \lambda(\dot{S}_k) + k\mu(\tilde{A}_k) - k\mu(\tilde{S}_k) - \sum_{i=k}^K \varepsilon_{i+1}^1 b - \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b.$$

Enfin, par définition, $A_{k-1}^{\ddot{\cdot}}$ est l'ensemble des éléments de A qui apparaissent exactement à $k-1$ étages, donc $\lambda(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}}) = k(\mu(\tilde{A}_{k-1}) - \mu(\tilde{A}_k))$, ainsi

$$\lambda(A_{k-1}^{\ddot{\cdot}} \cap \dot{S}_k) \geq k\mu(\tilde{A}_{k-1}) + \lambda(\dot{S}_k) - k\mu(\tilde{S}_k) - \sum_{i=k}^K \varepsilon_{i+1}^1 b - \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b. \quad (3.3.2)$$

2. Minoration de $\lambda(A_{k-1}'' \cap \dot{S}_k)$:

$\dot{S}_k = \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k \setminus \tilde{S}_{k+1}) = \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k) \setminus \pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})$ donc

$$\begin{aligned} \lambda(A_{k-1}'' \cap \dot{S}_k) &\geq \lambda(A_{k-1}'' \cap \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)) - \lambda(A_{k-1}'' \cap \pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})) \\ &\geq \lambda(A_{k-1}'' \cap \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)) \\ &\quad - \left(\lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})) - \lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1}) \cap (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\})) \right) \end{aligned}$$

car $(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\}) \cap A''_{k-1} = \emptyset$ par définition de A''_{k-1} . Or $\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\} \subseteq \pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})$ car $0, 1 \in B$ donc

$$\lambda\left(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1}) \cap (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\})\right) = \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\}),$$

et le lemme 3.0.1 implique

$$\lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\}) \geq \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)) + \mu(\tilde{A}_k).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})) - \lambda\left(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1}) \cap (\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k) + \{0, 1\})\right) \\ & \leq \lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})) - \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)) - \mu(\tilde{A}_k). \end{aligned}$$

De plus par (3.1.4) et (3.1.5), on a

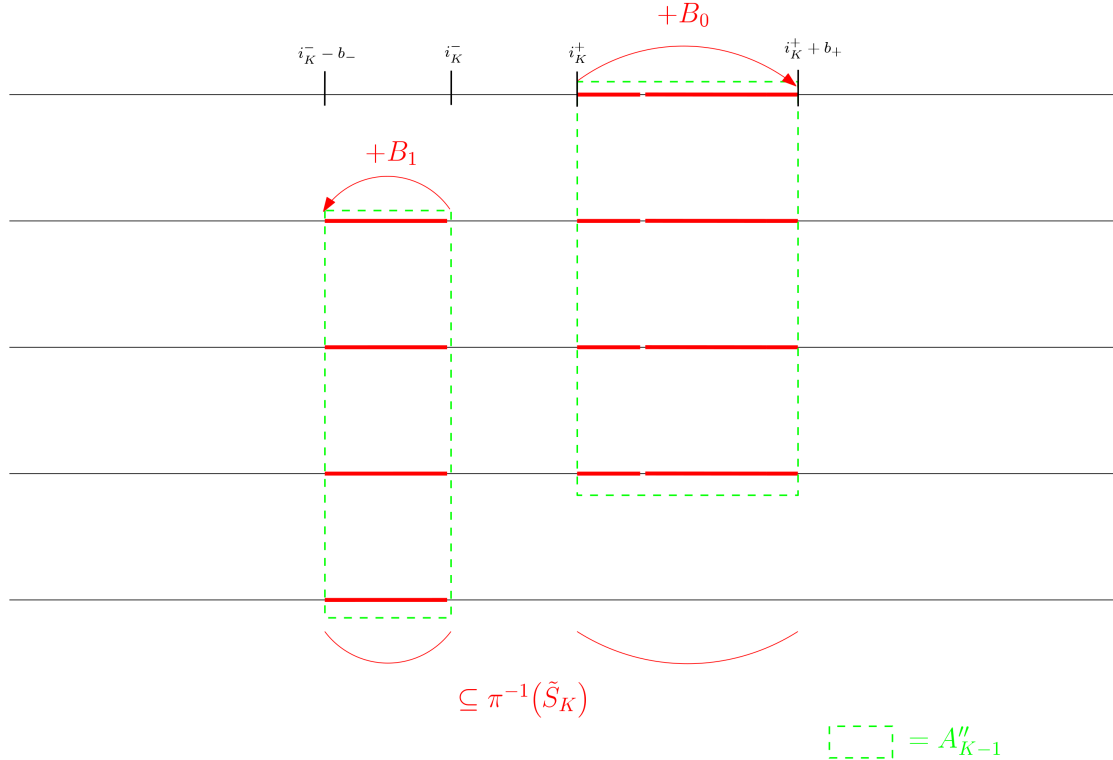
$$\begin{aligned} \lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})) - \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)) &= (k+1)\mu(\tilde{S}_{k+1}) + \sum_{i=k+2}^{K+1} \mu(\tilde{S}_i) + \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b \\ & - \left(k\mu(\tilde{A}_k) + \sum_{i=k+1}^K \mu(\tilde{A}_i)\right). \end{aligned}$$

Ainsi par (1.0.6), on a

$$\lambda(\pi_S^{-1}(\tilde{S}_{k+1})) - \lambda(\pi_A^{-1}(\tilde{A}_k)) - \mu(\tilde{A}_k) \leq (k+1)\varepsilon_{k+1}^1 b + \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 b + \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b.$$

D'autre part, comme $i_K^- - (K-k-1)b_-$, $i_K^+ + (K-k-1)b_+ \in \tilde{A}_k$ puisque $i_K^-, i_K^+ \in \tilde{A}_K$, et $b_+, 1 - b_- \in B$ (donc les bords sont atteints à chaque étape), on a

$$\lambda(A''_{k-1} \cap \pi_S^{-1}(\tilde{S}_k)) \geq kb.$$



Donc finalement

$$\lambda\left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k\right) \geq kb - (k+1)\varepsilon_{k+1}^1 b - \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 b - \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b. \quad (3.3.3)$$

3. Minoration de $\lambda\left(\left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k\right) \cap \left(A_{k-1} \cap \dot{S}_k\right)\right)$:

D'après (3.3.1), on a

$$\lambda\left(\left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k\right) \cap \left(A_{k-1} \cap \dot{S}_k\right)\right) \geq \lambda\left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k\right) + \lambda\left(A_{k-1} \cap \dot{S}_k\right) - \lambda\left(\dot{S}_k\right),$$

puis part (3.3.2) et (3.3.3) on obtient

$$\begin{aligned} \lambda\left(\left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k\right) \cap \left(A_{k-1} \cap \dot{S}_k\right)\right) &\geq kb - (k+1)\varepsilon_{k+1}^1 b - \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 b - \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b + k\mu\left(\tilde{A}_{k-1}\right) \\ &\quad + \lambda\left(\dot{S}_k\right) - k\mu\left(\tilde{S}_k\right) - \sum_{i=k}^K \varepsilon_{i+1}^1 b - \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b - \lambda\left(\dot{S}_k\right) \\ &\geq kb - (k+2)\varepsilon_{k+1}^1 b - 2 \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 b - 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b \\ &\quad + k\mu\left(\tilde{A}_{k-1}\right) - k\mu\left(\tilde{S}_k\right), \end{aligned}$$

d'où, d'après (1.0.6)

$$\lambda\left(\left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k\right) \cap \left(A_{k-1} \cap \dot{S}_k\right)\right) \geq kb - k\varepsilon_k^1 b - (k+2)\varepsilon_{k+1}^1 b - 2 \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 b - 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b. \quad (3.3.4)$$

4. Minoration de $\lambda\left(A'_{k-1} \cap A_{k-1}\right)$:

Soit $x \in \tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{S}_{k+1}$. Comme $x + \mathcal{L}_x \subset A$ et $0, 1 \in B$, on a $x + \mathcal{L}_x + \{0, 1\} \subset S$. De plus, $\#\mathcal{L}_x \geq k-1$ donc $\#(\mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \geq k$. Or $x \notin \tilde{S}_{k+1}$ donc $\#(\mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \leq k$ et donc finalement

$$\#(\mathcal{L}_x + \{0, 1\}) = k.$$

Mais $x \in \tilde{A}_{k-1}$ donc $\#(\mathcal{L}_x + \{0, 1\}) = \#\mathcal{L}_x + 1$ et donc nécessairement \mathcal{L}_x est composé d'entiers consécutifs. Or A'_{k-1} est également composé d'éléments à des étages consécutifs par construction, donc si $i > 1$

$$\left[\# \left\{ (x + \mathcal{L}_x) \cap A'_{k-1} \right\} = i - 1\right] \Leftrightarrow \left[\# \left\{ \left((x + \mathcal{L}_x) \cap A'_{k-1} \right) + \{0, 1\} \right\} = i\right].$$

De plus, par définition $A''_{k-1} = A'_{k-1} + \{0, 1\}$, donc

$$\begin{aligned} \left((x + \mathcal{L}_x) \cap A'_{k-1} \right) + \{0, 1\} &= (x + \mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \cap (A'_{k-1} + \{0, 1\}) \\ &= (x + \mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \cap A''_{k-1}, \end{aligned}$$

d'où si $i > 1$

$$\left[\# \left\{ (x + \mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \cap A''_{k-1} \right\} = i \right] \Rightarrow \left[\# \left\{ (x + \mathcal{L}_x) \cap A'_{k-1} \right\} = i - 1 \right],$$

et donc

$$\begin{aligned} & \mu \left(x \in \tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{S}_{k+1} \mid \# \left\{ (x + \mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \cap A''_{k-1} \right\} = i \right) \\ & \leq \mu \left(x \in \tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{S}_{k+1} \mid \# \left\{ (x + \mathcal{L}_x) \cap A'_{k-1} \right\} = i - 1 \right). \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \lambda \left(A'_{k-1} \cap \dot{A}_{k-1} \right) & \geq \lambda \left(A'_{k-1} \cap \dot{A}_{k-1} \cap \dot{S}_k \right) \\ & \geq \sum_{i=1}^{k-1} i \times \mu \left(x \in \tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{S}_{k+1} \mid \# \left\{ (x + \mathcal{L}_x) \cap A'_{k-1} \right\} = i \right) \\ & \geq \sum_{i=0}^{k-1} i \times \mu \left(x \in \tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{S}_{k+1} \mid \# \left\{ (x + \mathcal{L}_x) \cap A'_{k-1} \right\} = i \right) \\ & \geq \sum_{i=0}^{k-1} i \times \mu \left(x \in \tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{S}_{k+1} \mid \# \left\{ (x + \mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \cap A''_{k-1} \right\} = i + 1 \right) \\ & \geq \sum_{i=1}^k (i - 1) \times \mu \left(x \in \tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{S}_{k+1} \mid \# \left\{ (x + \mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \cap A''_{k-1} \right\} = i \right) \\ & \geq \sum_{i=1}^k i \times \mu \left(x \in \tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{S}_{k+1} \mid \# \left\{ (x + \mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \cap A''_{k-1} \right\} = i \right) \\ & \quad - \sum_{i=1}^k \mu \left(x \in \tilde{A}_{k-1} \setminus \tilde{S}_{k+1} \mid \# \left\{ (x + \mathcal{L}_x + \{0, 1\}) \cap A''_{k-1} \right\} = i \right) \\ & \geq \lambda \left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k \cap \ddot{A}_{k-1} \right) - \mu \left(\left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k \cap \ddot{A}_{k-1} \right) \pmod{1} \right) \\ & \geq \lambda \left(A''_{k-1} \cap \dot{S}_k \cap \ddot{A}_{k-1} \right) - \left(1 + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \right) b \\ & \geq kb - k\varepsilon_k^1 b - (k + 2)\varepsilon_{k+1}^1 b - 2 \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 b - 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 b - \left(1 + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \right) b \\ & \geq (k - 1)b - \left(k\varepsilon_k^1 + (k + 2)\varepsilon_{k+1}^1 + 2 \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 + 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \right) b. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $k \in \{1, \dots, K - 1\}$

$$\lambda \left(A'_k \cap \dot{A}_k \right) \geq kb - \left((k + 1)\varepsilon_{k+1}^1 + (k + 3)\varepsilon_{k+2}^1 + 2 \sum_{i=k+3}^{K+1} \varepsilon_i^1 + 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \right) b,$$

et donc

$$\lambda \left(A'_k \cap \dot{A}_k \right) \geq \lambda \left(\dot{A}_k \right) - \left(k\varepsilon_{k+1}^2 + \varepsilon_{k+1}^1 + (k + 1)\varepsilon_{k+2}^1 + 2 \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 + 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \right) b \quad (3.3.5)$$

car par (1.2.1)

$$\lambda \left(\dot{A}_k \right) = k \left(1 + \varepsilon_{k+1}^2 - \varepsilon_{k+1}^1 \right) b.$$

3.4 Conclusion : Structure principale de A .

Nous sommes désormais en mesure de donner une localisation précise de la majorité des éléments de A . Rappelons que

$$A = \bigsqcup_{k=1}^K \dot{A}_k,$$

et que

$$A' = \bigsqcup_{k=1}^K A'_k.$$

Par (3.2.1) et (3.3.5), on a

$$\begin{aligned} \lambda(A \cap A') &\geq \sum_{k=1}^K \lambda(\dot{A}_k \cap A'_k) \\ &\geq \lambda(\dot{A}_K) + \sum_{k=1}^{K-1} \lambda(\dot{A}_k) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{K-1} \left(k\varepsilon_{k+1}^2 + \varepsilon_{k+1}^1 + (k+1)\varepsilon_{k+2}^1 + 2 \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 + 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \right) b \\ &\geq \lambda(A) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{K-1} \left(k\varepsilon_{k+1}^2 + \varepsilon_{k+1}^1 + (k+1)\varepsilon_{k+2}^1 + 2 \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 + 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \right) b. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de majorer

$$\sum_{k=1}^{K-1} \left(k\varepsilon_{k+1}^2 + \varepsilon_{k+1}^1 + (k+1)\varepsilon_{k+2}^1 + 2 \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 + 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \right).$$

Pour cela nous allons commencer par utiliser au maximum la formule la plus précise que nous avons sur les epsilons, à savoir (1.2.2). Modifions donc légèrement la forme de cette somme afin de trouver quelque chose proche de (1.2.2). Tout d'abord on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K-1} \left(\varepsilon_{k+1}^1 + (k+1)\varepsilon_{k+2}^1 + 2 \sum_{i=k+2}^{K+1} \varepsilon_i^1 \right) &= \sum_{k=1}^{K-1} \left(\varepsilon_{k+1}^1 + (k+1)\varepsilon_{k+2}^1 \right) + 2 \sum_{k=2}^K (k-1)\varepsilon_{k+1}^1 \\ &\leq 3 \sum_{k=1}^K k\varepsilon_{k+1}^1. \end{aligned}$$

Ensuite $\min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \leq \varepsilon_1^2$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K-1} \left(k\varepsilon_{k+1}^2 + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 \right) &\leq \sum_{k=1}^{K-1} (K-k)\varepsilon_{K+1-k}^2 + (K-1)\varepsilon_1^2 \\ &\leq 3 \sum_{k=1}^K k\varepsilon_{K+1-k}^2 + \sum_{k=1}^{\lfloor K/4 \rfloor} (K-4k)\varepsilon_{K+1-k}^2. \end{aligned}$$

Enfin

$$\sum_{k=1}^{K-1} 2 \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 = 2(K-1) \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3 \leq 3K \sum_{i \geq K+2} \varepsilon_i^3,$$

d'où d'après (1.2.2), on a

$$\lambda(A) - \lambda(A \cap A') \leq 3K\varepsilon + \sum_{k=1}^{\lfloor K/4 \rfloor} (K-4k)\varepsilon_{K+1-k}^2.$$

De plus par (1.2.6), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\lfloor K/4 \rfloor} (K-4k)\varepsilon_{K+1-k}^2 &\leq \sum_{k=1}^{\lfloor K/4 \rfloor} (K-4k) \frac{K}{K+1-(K+1-k)} \varepsilon \\ &\leq K\varepsilon \sum_{k=1}^{\lfloor K/4 \rfloor} \frac{K-4k}{k} \\ &\leq K^2 \log\left(\frac{K}{4}\right) \varepsilon - 4K \left\lfloor \frac{K}{4} \right\rfloor \varepsilon \\ &\leq K^2 \log\left(\frac{K}{4}\right) \varepsilon - K(K-4)\varepsilon, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda(A) - \lambda(A \cap A') &\leq 3K\varepsilon + K^2 \log\left(\frac{K}{4}\right) \varepsilon - K(K-4)\varepsilon \\ &\leq K^2 \log\left(\frac{K}{4}\right) \varepsilon - K(K-7)\varepsilon, \end{aligned}$$

et donc finalement

$$\lambda(A \cap A') \geq \lambda(A) - \left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7)\right) \varepsilon b. \quad (3.4.1)$$

On a donc montré que A était concentré dans

$$A' = a' + \bigsqcup_{k=0}^{K-1} [k - kb_-, k + \mu(I_K) + (K-k-1)b_+].$$

Or par le corollaire 2.2.1

$$\begin{aligned} \mu(I_K) &\leq \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k (\varepsilon_{k+1}^1 - \varepsilon_{k+1}^2) b + \varepsilon_K^2 b \\ &\leq \delta b + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} k \varepsilon_{k+1}^1 b + \varepsilon_K^2 b \\ &\leq \delta b + \frac{b}{K} \sum_{k=1}^{K-1} (k \varepsilon_{k+1}^1 b + \varepsilon_K^2 b) + \frac{K-1}{K} \varepsilon_K^2 b \\ &\leq \delta b + \varepsilon b + (K-1)\varepsilon b \\ &\leq (\delta + K\varepsilon) b \end{aligned}$$

où la quatrième ligne provient de (1.2.2) et (1.2.6). Ainsi

$$\mu(I_K) \leq (\delta + K\varepsilon)b,$$

et

$$A' \subseteq a' + \bigsqcup_{k=0}^{K-1} [k - kb_-, k + (\delta + K\varepsilon)b + (K - k - 1)b_+],$$

où $a' = \min \tilde{A}_K$. Notons que la réunion est disjointe car par l'hypothèse (1.0.5) on a $(K + \delta + 2\varepsilon)b < 1$. Or si pour $k \in \{0, \dots, K - 2\}$, on appelle $d_{k,k+1}$ la distance entre deux intervalles consécutifs de A' en k et $k + 1$, on a

$$\begin{aligned} d_{k,k+1} &= 1 - (k + 1)b_- - (K - 1 - k)b_+ - (\delta + K\varepsilon)b \\ &\geq 1 - kb_- - (K - 2 - k)b_+ - (b + \varepsilon b) - \delta b - K\varepsilon b, \end{aligned}$$

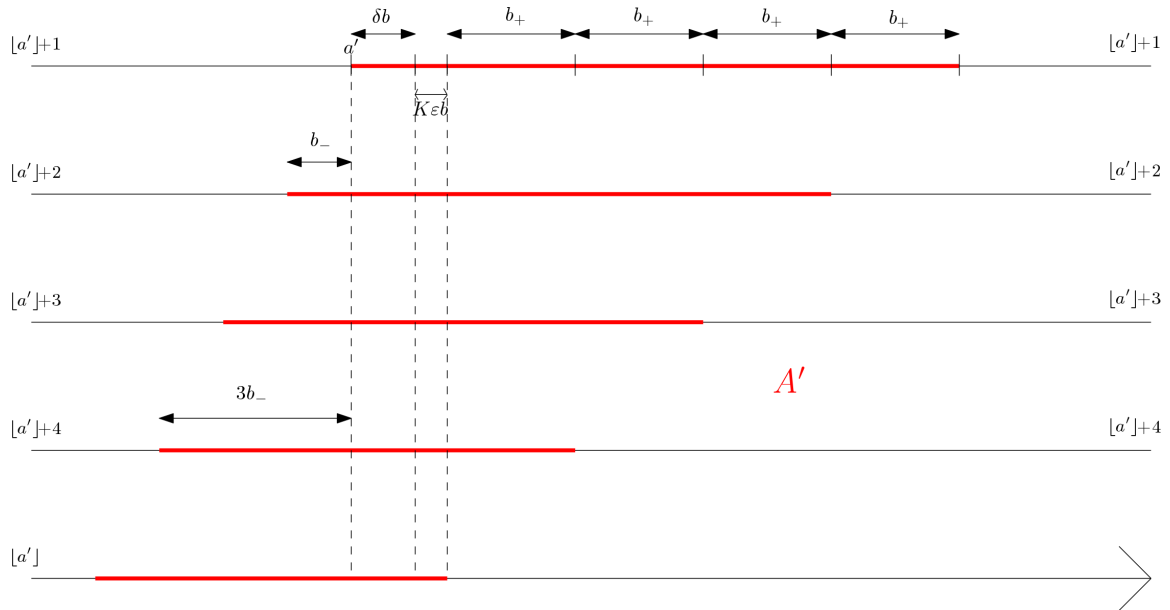
car $b_+ + b_- \leq b(1 + \varepsilon)$. Ainsi

$$\begin{aligned} d_{k,k+1} &\geq 1 - kb(1 + \varepsilon) - (K - 2 - k)b(1 + \varepsilon) - b - \delta b - 1K\varepsilon b \\ &\geq 1 - (K + \delta + \varepsilon)b + (1 - 2K\varepsilon)b \\ &> (1 - 2K\varepsilon)b, \end{aligned}$$

et $(1 - 2K\varepsilon)b$ est strictement positif car par l'hypothèse (1.0.2), on a $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K}\right)^3$ et $\left(\frac{\delta}{3K}\right)^3 \leq \frac{1}{2K}$, donc $1 - 2K\varepsilon > 0$. Ainsi $d_{k,k+1} > 0$ et donc chaque intervalle de A' est bien disjoint des autres. Finalement, l'union formant A' est bien disjointe ce qui termine cette partie sur la structure principale de A .

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{2K}$.

Voici une représentation de A' pour $K = 5$.



Étape 4

Structure totale de A

4.1 Stratégie et premiers résultats

La partie précédente démontre qu'il existe un réel a' tel que

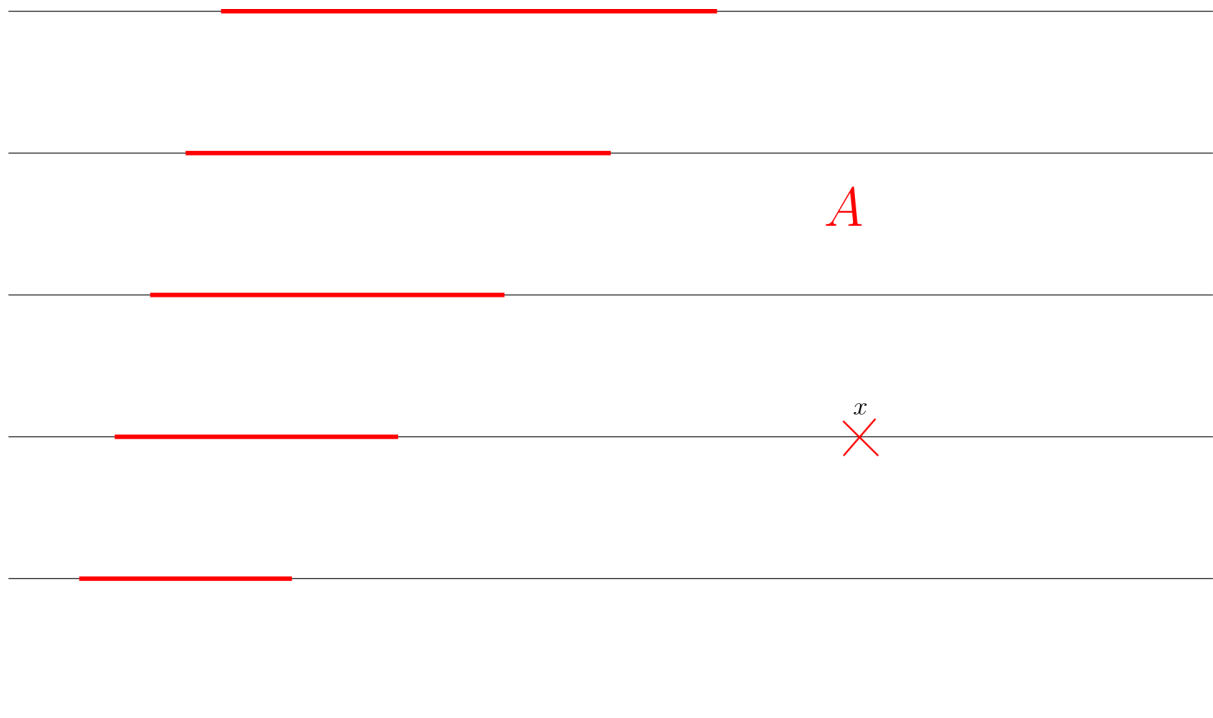
$$\lambda(A \cap A') \geq \lambda(A) - \left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6) \right) \varepsilon b,$$

où

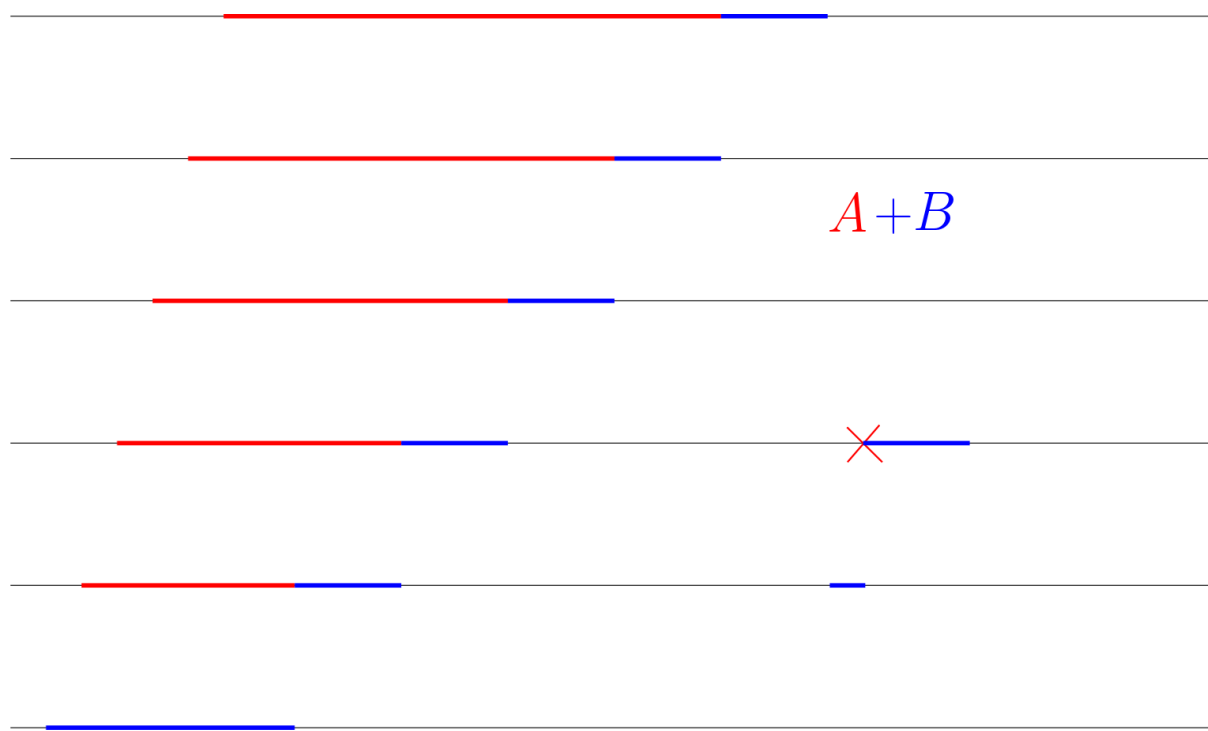
$$A' = a' + \bigsqcup_{k=0}^{K-1} [k - kb_-, k + \delta b + Kb\varepsilon + (K - k - 1)b_+].$$

Ainsi l'essentiel de A se concentre dans cette réunion d'intervalles A' mais qu'en est-il du reste des éléments de A ? Nous allons voir qu'ils ne peuvent pas être n'importe où et même qu'ils sont nécessairement très proches de A' . En effet, nous verrons que $\lambda(B + (A \cap A'))$ est déjà très proche de $\lambda(A) + (K + \delta)b$ et donc que la masse ajoutée par $B + (A \setminus A')$ est très petite, ce qui va contraindre $A \setminus A'$ à être proche de $A \cap A'$.

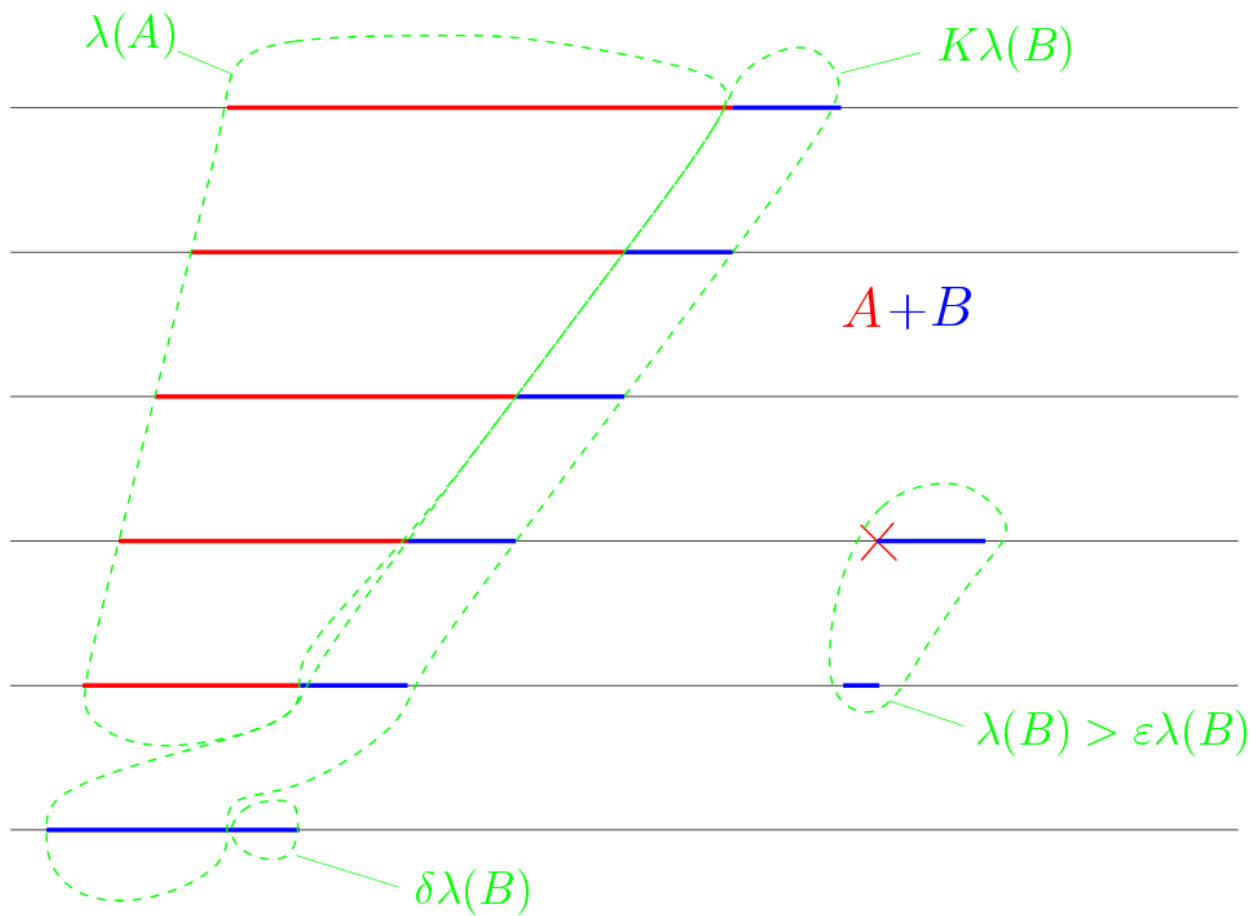
Si un élément x de A est trop loin de la structure globale $A \cap A'$, comme ceci :



alors x va ajouter trop de masse à $A + B$:



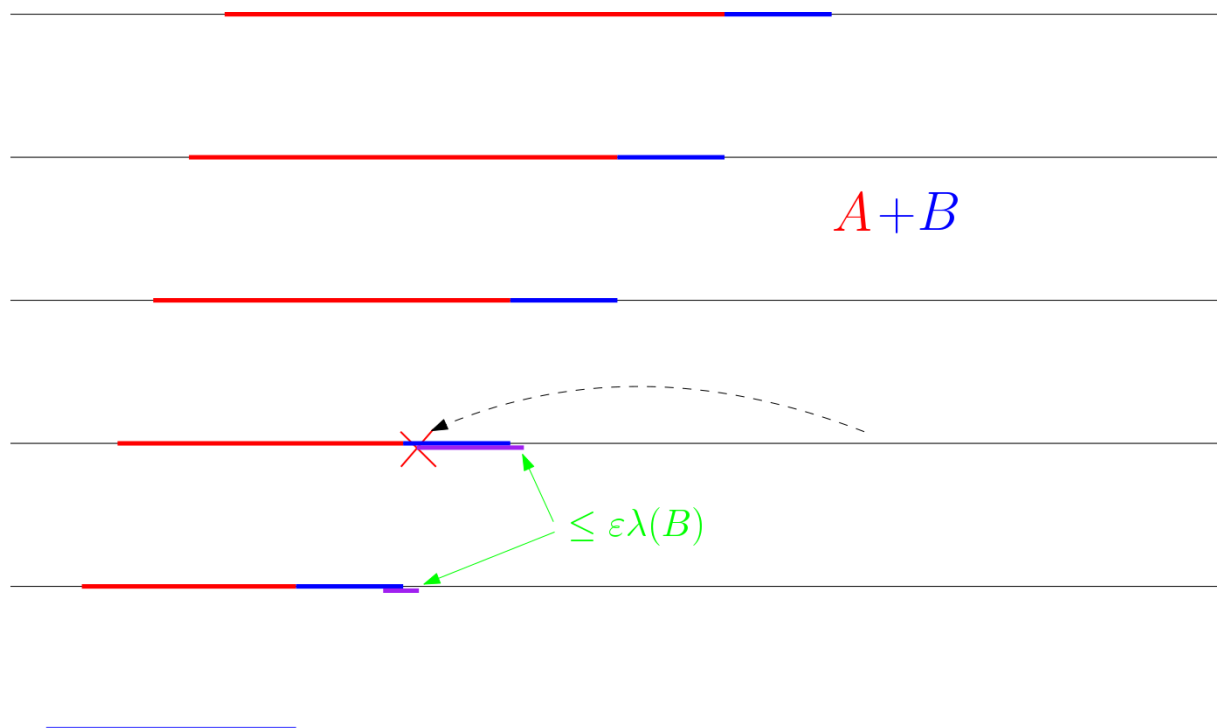
En effet, par hypothèse on a $\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)b$, or



La seule possibilité pour que ce point x isolé existe, serait qu'il soit proche de la structure globale de A et qu'ainsi,

$$\lambda\left((x + B) \setminus \left((A \cap A') + B\right)\right) \leq \varepsilon b,$$

comme ceci



C'est l'idée que nous allons développer dans la suite afin de prouver que $A \setminus A'$ doit nécessairement être proche de $A \cap A'$. Bien sûr, dans les dessins précédents nous avons supposé que toute la mesure de A était concentrée dans $A \cap A'$ et donc il ne restait que l'erreur εb de l'hypothèse initiale : $\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)b$. Ce n'est pas nécessairement le cas et nous n'avons que la minoration

$$\lambda(A \cap A') \geq \lambda(A) - \left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7)\right)\varepsilon b,$$

c'est donc un sous-ensemble de A de mesure $\left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7)\right)\varepsilon b$ qui peut se trouver hors de la structure principale $A \cap A'$, mais l'idée fonctionne quand même et ce sous-ensemble ne peut pas être trop loin de $A \cap A'$. Afin de donner une borne explicite, nous allons nous intéresser au pire des cas : quand $\lambda\left((A \cap A') + B\right)$ est le plus petit possible (pour que $A \setminus A'$ puisse avoir le plus de liberté possible).

Lemme 4.1.1. *On a*

$$\lambda\left((A \cap A') + B\right) \geq \lambda(A \cap A') + (K + \delta')b,$$

où $\delta' = \delta - \left(K \log(K) - K(1 + \log 4) + 7\right)\varepsilon$.

Preuve. D'après (3.4.1), on a

$$\lambda(A \cap A') \geq \lambda(A) - \left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7) \right) \varepsilon b,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(A \cap A')}{b} &\geq \frac{\lambda(A)}{b} - \frac{\left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7) \right) \varepsilon b}{b} \\ &\geq \frac{K(K-1)}{2} + K\delta - \left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7) \right) \varepsilon \\ &\geq \frac{K(K-1)}{2} + K \left(\delta - \left(K \log(K) - K(1 + \log 4) + 7 \right) \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Or par l'hypothèse (1.0.2), $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K} \right)^3$ donc

$$\varepsilon < \frac{\delta}{K \log(K) - K(1 + \log 4) + 7},$$

et donc

$$\delta - \left(K \log(K) - K(1 + \log 4) + 7 \right) \varepsilon > 0.$$

D'autre part,

$$\frac{\lambda(A \cap A')}{b} \leq \frac{\lambda(A)}{b} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta.$$

Ainsi il existe δ' tel que

$$0 < \delta - \left(K \log(K) - K(1 + \log 4) + 7 \right) \varepsilon \leq \delta' \leq \delta < 1,$$

et

$$\frac{\lambda(A \cap A')}{b} = \frac{K(K-1)}{2} + K\delta'.$$

Donc finalement, comme par (1.0.5)

$$(K + \delta')b \leq (K + \delta)b < 1,$$

on peut utiliser le théorème de Ruzsa (théorème 0.0.2), et on a

$$\lambda((A \cap A') + B) \geq \lambda(A \cap A') + (K + \delta')b,$$

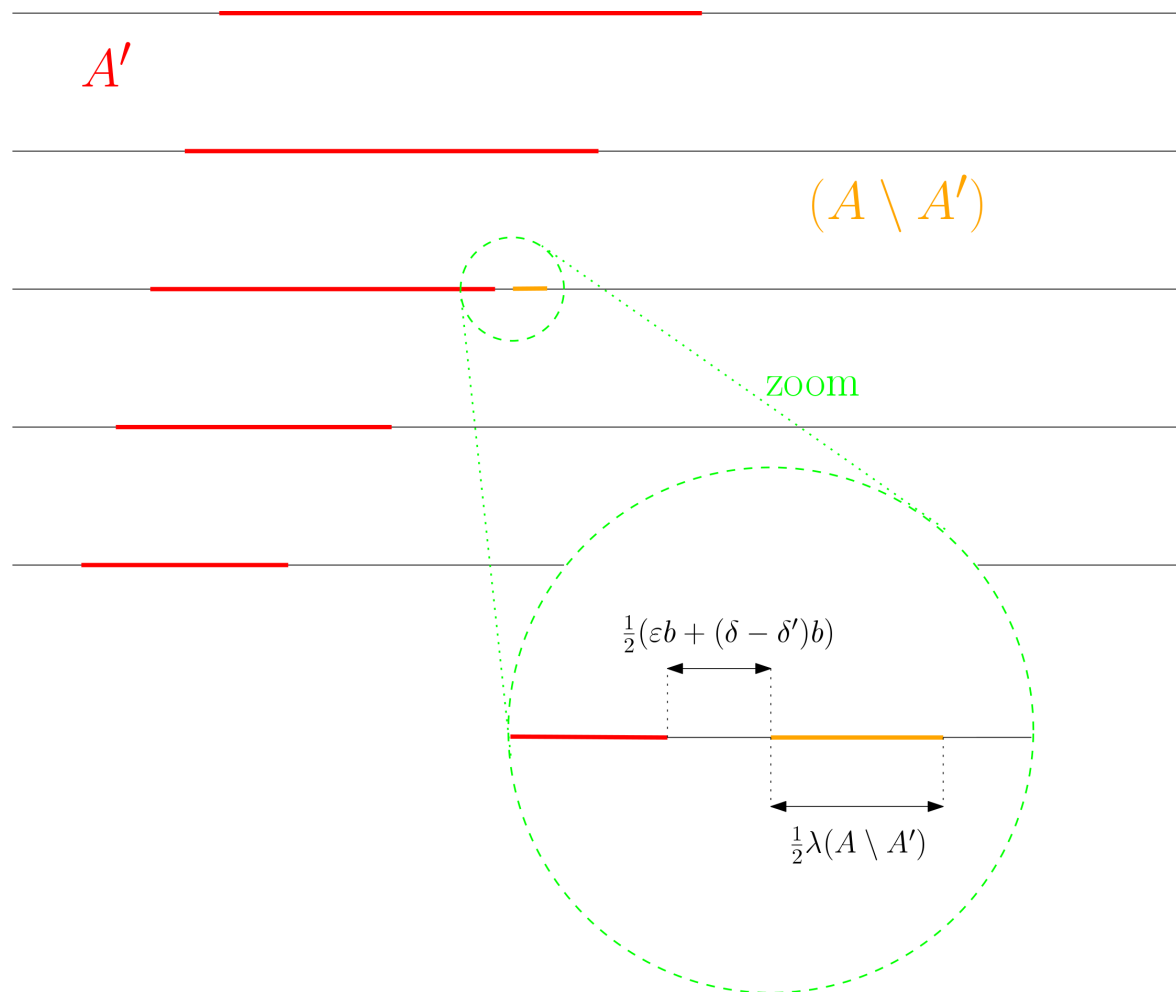
où $\delta' \geq \delta - \left(K \log(K) - K(1 + \log 4) + 7 \right) \varepsilon$. En redéfinissant naturellement δ' , on obtient le lemme.

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{\delta}{K \log K}$ si $K \geq 3$ et de $\varepsilon < \frac{\delta}{2(2 - \log 2)}$ si $K = 2$.

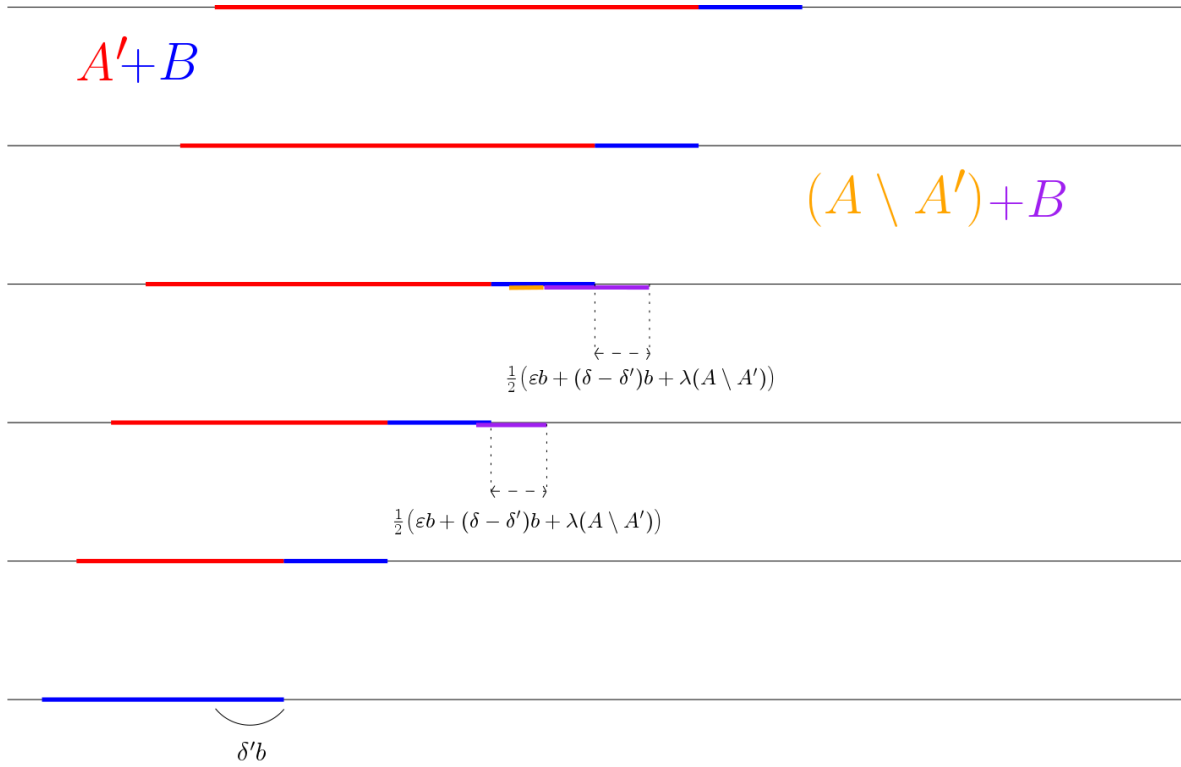
□

Nous avons donc une marge d'erreur, en sommant par B , d'au plus $\varepsilon b + (\delta - \delta')b + \lambda(A \setminus A')$ pour placer les éléments de $A \setminus A'$. En somme, en dehors de leur propre mesure, les éléments de $(A \setminus A')$, sommés par B , ne peuvent fournir une erreur que d'au plus $\varepsilon b + (\delta - \delta')b$. C'est à dire, d'au plus $(K \log(K) - K(1 + \log 4) + 7)\varepsilon$.

Voici un exemple d'emplacement possible pour $A \setminus A'$ avec cette marge. Avec un petit zoom (en vert) pour mieux voir la situation.



Puis quand on ajoute B :



On voit que dans ce cas ci, un élément de $A \setminus A'$ sur le même étage qu'un morceau de A' ne peut pas se trouver plus loin qu'à une distance $\frac{1}{2}(\varepsilon b + (\delta - \delta')b + \lambda(A \setminus A'))$ de ce morceau. Bien sûr, cela n'est vrai que si $\lambda(B_0)$ et $\lambda(B_1)$ sont supérieurs à $\frac{1}{2}(\varepsilon b + (\delta - \delta')b)$. Si l'un des deux est réduit à un point par exemple, on perd le coefficient $\frac{1}{2}$. Un élément de $A \setminus A'$ sur le même étage qu'un morceau de A' peut se trouver jusqu'à une distance $\varepsilon b + (\delta - \delta')b + \frac{1}{2}\lambda(A \setminus A')$ de ce morceau. En définitive, nous allons voir que dans les hypothèses du théorème 0.0.6, cette distance maximale, entre un élément de $A \setminus A'$ et A' , est nécessairement inférieure à

$$\left(K(K+1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 8 \right) \varepsilon b.$$

C'est également globalement le cas dans les hypothèses plus faibles du théorème 0.0.7 mais il existe juste certaines petites zones supplémentaires qui peuvent être atteintes dans certains cas extrêmes.

Dans ces exemples, on choisit $A \setminus A'$ qui ne se trouve qu'à un seul endroit, n'est qu'en un seul morceau (c'est un intervalle). Ce n'est pas nécessairement le cas mais c'est le pire cas dans le sens où c'est le cas permettant aux éléments de $A \setminus A'$ de se trouver le plus loin de A' . En effet, en supposant que $A \setminus A'$ est un intervalle, on a concentré toute l'erreur $\varepsilon b + (\delta - \delta')b + \lambda(A \setminus A')$ au même endroit, permettant à un élément de se trouver à une distance maximale de A' . Nous allons nous intéresser à cette distance maximale afin d'exhiber une fine région autour de A' dans laquelle peut se trouver $A \setminus A'$. Pour cela, nous allons devoir contrôler la contribution qu'apporte $(A \setminus A') + B$ à S . Ce qui nous conduit au lemme suivant

Lemme 4.1.2. *On a*

$$\lambda\left(\left((A \setminus A') + B\right) \setminus \left((A \cap A') + B\right)\right) \leq \tau_K \varepsilon b,$$

où $\tau_K = K(K+1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7$.

Preuve. Par hypothèse, on a

$$\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)b.$$

De plus

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda\left(\left((A \cap A') \sqcup (A \setminus A')\right) + B\right) \\ &= \lambda\left((A \cap A') + B\right) + \lambda\left(\left((A \setminus A') + B\right) \setminus \left((A \cap A') + B\right)\right), \end{aligned}$$

ainsi, directement par le lemme 4.1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda\left(\left((A \setminus A') + B\right) \setminus \left((A \cap A') + B\right)\right) &\leq \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)b - (\lambda(A \cap A') + (K + \delta')b) \\ &\leq \lambda(A) - \lambda(A \cap A') + (\delta - \delta' + \varepsilon)b \\ &\leq \lambda(A) - \lambda(A \cap A') \\ &\quad + \left(K \log(K) - K(1 + \log 4) + 7\right)\varepsilon b, \end{aligned}$$

et donc finalement par (3.4.1), on a

$$\begin{aligned} &\lambda\left(\left((A \setminus A') + B\right) \setminus \left((A \cap A') + B\right)\right) \\ &\leq \left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7)\right)\varepsilon b + \left(K \log(K) - K(1 + \log 4) + 7\right)\varepsilon b \\ &\leq K\left((K+1) \log(K) - K(1 + \log 4) + 6 - \log 4\right)\varepsilon b + 7\varepsilon b. \end{aligned}$$

□

Le lemme 4.1.2 nous donnera un contrôle de l'erreur commise en remplaçant A par $A \cap A'$. Il permettra en particulier pour $x \in A \setminus A'$ de contrôler la contribution de $x + B$ hors de $A' + B$ et de conclure que x est proche de A' . Nous allons principalement l'utiliser sous la forme du corollaire suivant.

Corollaire 4.1.3. *Soit $x \in A \setminus A'$, on a*

$$\lambda\left((x + B) \setminus (A' + B)\right) < b - \left((3K)^3 - \tau_K\right)\varepsilon b,$$

où $\tau_K = K(K+1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7$.

Preuve. Nous allons raisonner par contraposée et voir que la négation de ce corollaire 4.1.3 contredit l'hypothèse (1.0.2) : $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K}\right)^3$. Supposons donc que

$$\lambda\left((x + B) \setminus (A' + B)\right) \geq b - \left((3K)^3 - \tau_K\right)\varepsilon b.$$

Par le lemme 4.1.2, et comme $((x + B) \setminus (A' + B)) \subseteq (((A \setminus A') + B) \setminus (A' + B))$, on a

$$\begin{aligned} \tau_K \varepsilon b &\geq \lambda \left(((A \setminus A') + B) \setminus ((A \cap A') + B) \right) \\ &\geq \lambda \left((x + B) \setminus (A' + B) \right) \\ &\geq b - ((3K)^3 - \tau_K) \varepsilon b, \end{aligned}$$

d'où

$$\varepsilon \geq \frac{1}{(3K)^3},$$

ce qui contredit directement l'hypothèse (1.0.2) et termine cette preuve.

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{27K^3}$.

□

Maintenant que nous avons ce contrôle sur la contribution de $(A \setminus A') + B$ à la mesure de S , nous sommes prêts pour exhiber une région limite autour de A' en dehors de laquelle aucun élément de A ne peut se trouver et ainsi finir la démonstration des théorèmes 0.0.6 et 0.0.7. Commençons par établir une région limite autour de $[\min A', \max A']$.

4.2 Le cas des éléments de $A \setminus [\min A', \max A']$

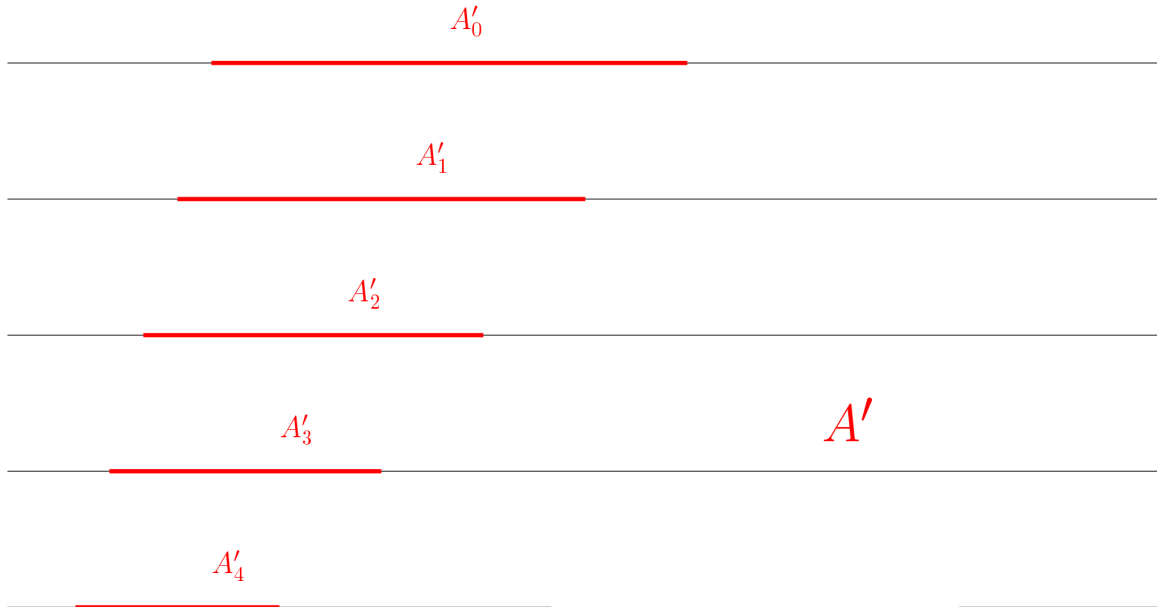
On rappelle que

$$A' = a' + \bigsqcup_{k=0}^{K-1} [k - kb_-, k + \delta b + Kb\varepsilon + (K - k - 1)b_+],$$

et on pose pour tout $k \in \{0, \dots, K - 1\}$

$$A'_k = a' + [k - kb_-, k + \delta b + Kb\varepsilon + (K - k - 1)b_+],$$

de sorte que $A' = \bigsqcup_{k=0}^{K-1} A'_k$ (on peut voir A'_k comme le k -ème étage de A').



Nous montrerons que A ne peut pas être loin de A' mais commençons par montrer qu'il ne peut pas être loin de $[\min A', \max A']$.

Nous allons commencer par montrer que les éléments de $A \setminus A'$ ne peuvent pas être trop inférieurs à $\min A'$ puis nous allons appliquer une certaine symétrie afin de conclure aisément que de la même manière ils ne peuvent pas être trop supérieurs à $\max A'$. Le cas des éléments de A inférieurs à $\min A'$ et celui des éléments de A supérieurs à $\max A'$ représentent deux cas symétriques en échangeant les rôles de b_- et b_+ par la transformation

$$\begin{aligned} \chi &: \overline{\mathcal{P}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathcal{P}}(\mathbb{R}) \\ E &\longmapsto \sup E - E \end{aligned}$$

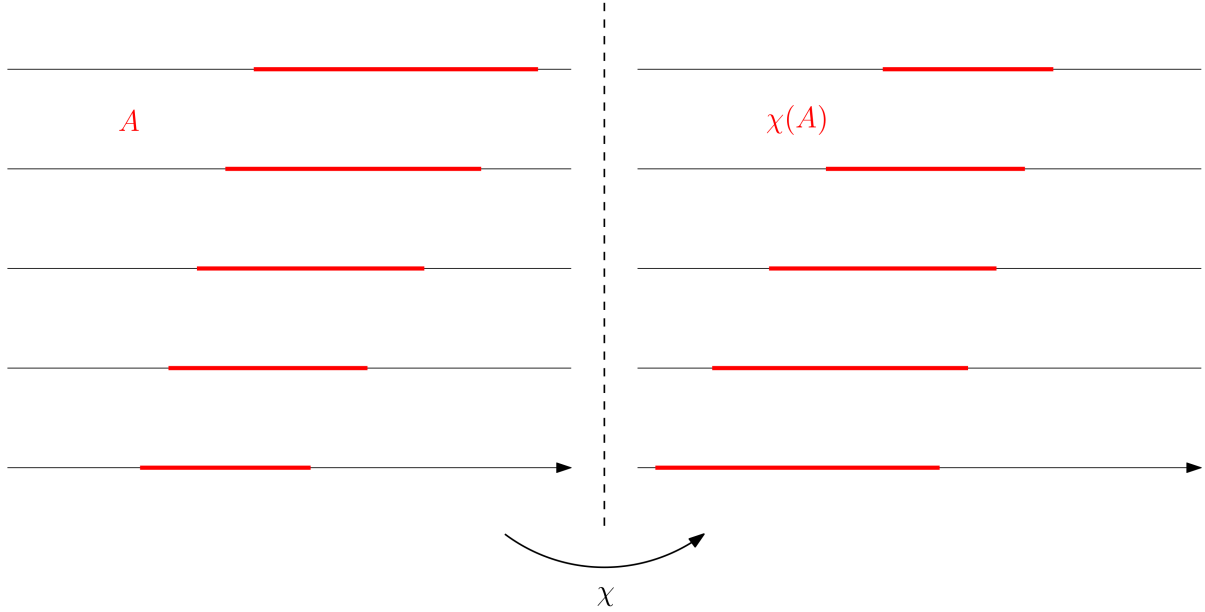
or cette transformation laisse invariant tout le travail effectué jusqu'à présent car déjà

$$\chi(B) + \chi(A) = (1 - B) + (\sup A - A) = (1 + \sup A) - (A + B) = \chi(A + B),$$

donc

$$\lambda(\chi(B) + \chi(A)) = \lambda(\chi(A + B)) = \lambda(A + B).$$

De plus, par construction de A' , on a $\chi(A)' = \chi(A')$ (nous le prouverons rigoureusement plus tard). Simplement, χ échange les rôles de b_+ et b_- .



Ainsi il nous suffit de prouver qu'aucun élément de A ne peut être trop inférieur à $\min A'$ puis en reprenant tout le travail effectué jusqu'ici avec $\chi(A)$ et $\chi(B)$ on obtiendra qu'aucun élément de $\chi(A)$ ne peut être trop inférieur à $\chi(A)'$, ce qui signifie en appliquant à nouveau χ qu'aucun élément de A ne peut être trop supérieur à $\max A'$ (car nous verrons que $\chi(A)' = \chi(A')$ et $\chi^2 = Id$).

Lemme 4.2.1. *Soit $x \in A$ tel que $x < \min A'$, on a nécessairement*

$$x \in [a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b, a' + \left(\{0\} \cup [b - 1, (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b + \delta b - 1] \right)],$$

où on rappelle que $\tau_K = (K(K + 1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7)$.

Preuve. Soit $x \in A$ tel que $x < \min A'$. D'après le lemme 4.1.2, on a

$$\lambda\left(\left((A \setminus A') + B\right) \setminus \left((A \cap A') + B\right)\right) \leq \tau_K b \varepsilon,$$

donc nécessairement

$$\lambda\left((x + B) \setminus (A' + B)\right) \leq \tau_K b \varepsilon. \quad (4.2.1)$$

Rappelons que par l'hypothèse (1.0.2), on a $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K}\right)^3$. Ainsi

$$\varepsilon < \frac{1}{(K(K + 1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7)},$$

donc $b > \tau_K b \varepsilon$, et donc

$$\lambda\left((x + B) \setminus (A' + B)\right) < b.$$

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{\tau_K}$.

Ainsi nécessairement $(x + B) \cap (A' + B) \neq \emptyset$. De plus, comme $x < \min A'$ et $B \subseteq [0, 1]$, $x + B \subseteq [x, \min A' + 1[$ et donc $x + B$ ne peut intersecter que les deux premiers morceaux de $A' + B$

$$(x + B) \cap (A' + B) = (x + B) \cap \left((A'_0 + B_0) \sqcup (A'_1 + B_0) \right),$$

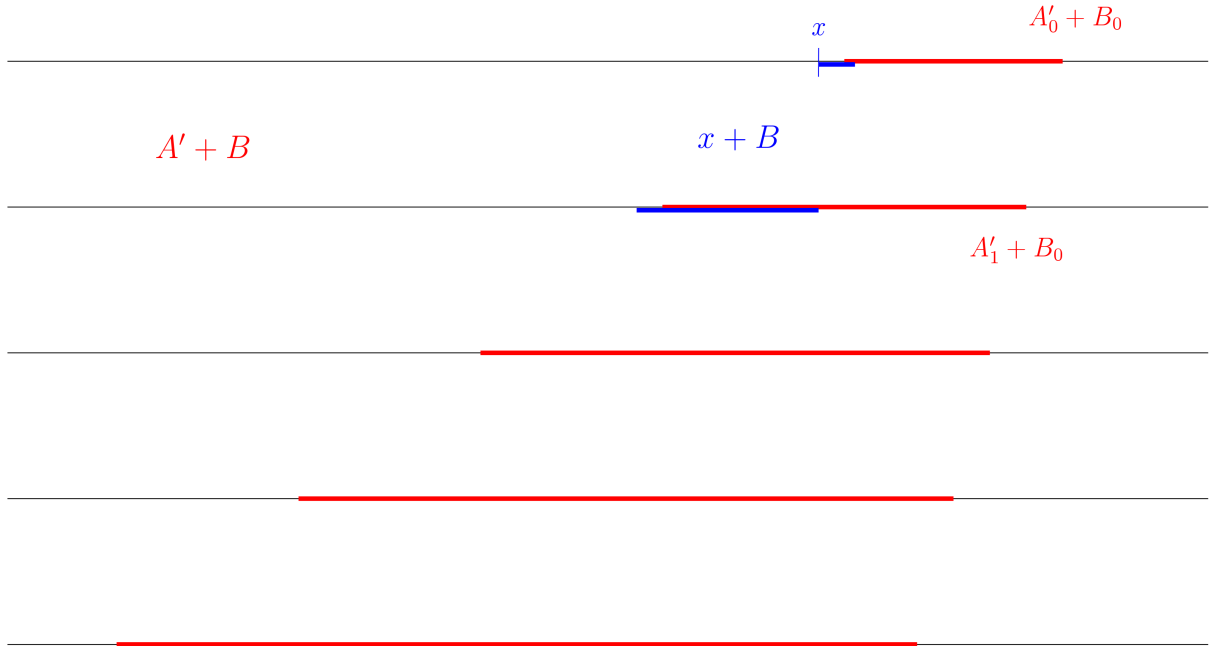
(car on a par construction $A'_0 + B_1 \subseteq A'_1 + B_0$). Aussi, $x + B = (x + B_0) \sqcup (x + B_1)$ donc $(x + B) \cap (A' + B) \neq \emptyset$ se réécrit

$$\left((x + B_0) \sqcup (x + B_1) \right) \cap \left((A'_0 + B_0) \sqcup (A'_1 + B_0) \right) \neq \emptyset,$$

et comme $x < \min A'$, $(x + B_0) \cap (A'_1 + B_0) = \emptyset$, et donc on a

$$\left((x + B_0) \cap (A'_0 + B_0) \right) \sqcup \left((x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \right) \sqcup \left((x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) \right) \neq \emptyset.$$

Il faut donc qu'au moins l'un des trois ensembles composant cette union soit non vide, ce qui donne plusieurs possibilités. Nous allons discuter selon la taille de B_0 . Soit B_0 est suffisamment gros pour "contenir l'erreur" et alors $x + B_0$ doit avoir une grosse intersection avec $A' + B$ et donc x est nécessairement proche de A' . Soit B_0 est petit ce qui signifie que B_1 est grand et $A'_0 + B_0$ est petit. Ainsi $x + B_1$ est grand (trop grand pour être contenu dans l'erreur) alors que $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0)$ est petit. Ce qui entraîne que $x + B_1$ doit avoir une grosse intersection avec $A'_1 + B_0$ et donc x est proche de A'_0 .



Commençons par une remarque : sous l'hypothèse (1.0.2), on a $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K} \right)^3$, ce qui implique quel que soit $K \geq 2$

$$\varepsilon < \frac{1}{2(\tau_K + 1)}. \quad (4.2.2)$$

A) Premier cas : $\lambda(B_0) > \tau_K \varepsilon b$.

On suppose donc ici que $\lambda(B_0) > \tau_K \varepsilon b$. Par (4.2.1), on a directement

$$\lambda\left((x + B_0) \cap (A' + B) \right) \geq \lambda(B_0) - \tau_K \varepsilon b,$$

or comme $(x + B_0) \subseteq x + [0, b_+]$ et $(A' + B) \subseteq [\min A', +\infty[$, on a

$$\lambda\left([x, x + b_+] \cap [\min A', +\infty[\right) \geq \lambda(B_0) - \tau_K \varepsilon b.$$

Le terme de droite est strictement supérieur à 0 car on a supposé que $\lambda(B_0) > \tau_K \varepsilon b$ donc l'intersection à gauche est non vide. De plus $x < \min A'$, donc

$$\lambda\left([\min A', x + b_+]\right) \geq \lambda(B_0) - \tau_K \varepsilon b,$$

d'où

$$x + b_+ - \min A' \geq \lambda(B_0) - \tau_K \varepsilon b,$$

et comme $b_+ \leq \lambda(B_0) + \varepsilon b$ par (2.3.15), finalement

$$x \geq \min A' - (\tau_K + 1)\varepsilon b.$$

On a donc

$$x \in [\min A' - (\tau_K + 1)\varepsilon b, \min A'[:$$

B) Second cas : $\lambda(B_0) \leq \tau_K \varepsilon b$.

On suppose donc ici que $\lambda(B_0) \leq \tau_K \varepsilon b$, ainsi $\lambda(B_1) \geq b - \tau_K \varepsilon b$. Or par (4.2.2)

$$b - \tau_K \varepsilon b > \tau_K \varepsilon b.$$

Ainsi

$$\lambda(B_1) > \tau_K \varepsilon b,$$

et donc nécessairement par le lemme 4.1.2, on a

$$(x + B_1) \cap (A' + B) \neq \emptyset.$$

On rappelle que par construction $A'_0 + B_1 \subseteq A'_1 + B_0$, il y a donc trois possibilités :

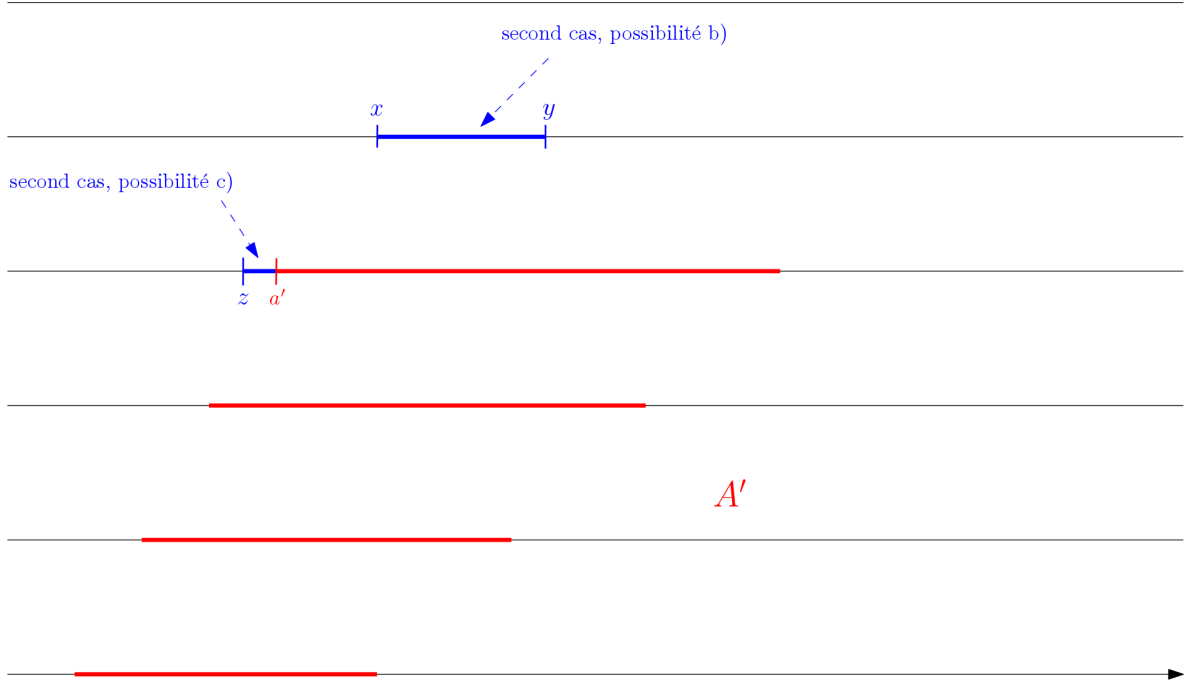
- a) $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \neq \emptyset$ et $(x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) \neq \emptyset$
- b) $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \neq \emptyset$ et $(x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) = \emptyset$
- c) $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) = \emptyset$ et $(x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) \neq \emptyset$

Nous allons voir que la possibilité a) est impossible, que b) implique que

$$x \in \left[\min A' - 1 - (\tau_K + 1)\varepsilon b, \min A' - 1 + (\delta + K\tau_K\varepsilon + 3K\varepsilon)b \right]$$

et que c) implique que

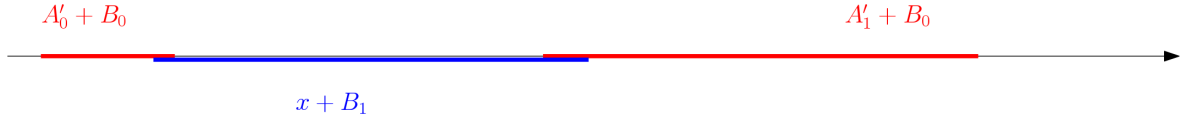
$$x \in [\min A' - (\tau_K + 1)\varepsilon b, \min A'[:$$



où

$$\begin{aligned} x &= a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b + b - 1 \\ y &= a' + K(\tau_K + 3)\varepsilon b + \delta b - 1 \\ z &= a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b \end{aligned}$$

a) $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \neq \emptyset$ et $(x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) \neq \emptyset$:



Nous allons raisonner par l'absurde pour montrer que ce cas de figure est en fait impossible. En effet, pour qu'on soit dans cette configuration, il faudrait que l'écart entre les deux premiers morceaux de A' soit inférieur au diamètre de B_1 , or nous sommes dans le second cas et $\lambda(B_0)$ est petit donc les deux premiers morceaux A'_0 et A'_1 sont petits et donc l'écart entre eux est grand. C'est l'idée que nous allons développer ici.

On suppose donc que $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \neq \emptyset$ et $(x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) \neq \emptyset$. Ainsi nécessairement, $[\max A'_0 + b_+, \min A'_1] \subseteq x + [1 - b_-, 1]$ et donc

$$\begin{aligned} \lambda((x + B_1) \setminus (A' + B)) &\geq \lambda((x + B_1) \cap [\max A'_0 + b_+, \min A'_1]) \\ &\geq \lambda([\max A'_0 + b_+, \min A'_1]) + \lambda(x + B_1) - \lambda(x + [1 - b_-, 1]) \\ &\geq \lambda([\max A'_0 + b_+, \min A'_1]) - \varepsilon b, \end{aligned}$$

où la deuxième ligne est obtenue par (3.3.1). Or

$$\begin{aligned}
\lambda\left([\max A'_0 + b_+, \min A'_1]\right) &= 1 - \left(\delta b + K\varepsilon b + (K-1)b_+ + b_+\right) - b_- \quad \text{par définition de } A' \\
&\geq 1 - \left(\delta b + K\varepsilon b + (K-1)b_+\right) - (b + \varepsilon b) \quad \text{par (2.3.16)} \\
&\geq 1 - \left(\delta b + K\varepsilon b + (K-1)(b - b_- + \varepsilon b)\right) - (b + \varepsilon b) \quad \text{par (2.3.14)} \\
&\geq 1 - (K + \delta + 2\varepsilon)b + (K-1)b_- - 2(K-1)\varepsilon b \\
&\geq (K-1)b_- - 3(K-1)\varepsilon b \quad \text{par (1.0.5)} \\
&\geq (K-1)(b_- - 2\varepsilon b) \\
&\geq (b_- - 2\varepsilon b) \quad \text{car } K \geq 2 \text{ (cf. remarque 1.0.1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lambda\left((x + B) \setminus (A' + B)\right) \geq \lambda\left((x + B_1) \setminus (A' + B)\right) \geq b_- - 2\varepsilon b,$$

et donc finalement par le lemme 4.1.2 et parce qu'on est dans le cas **B**

$$\tau_K \varepsilon b \geq b - \tau_K \varepsilon b - 2\varepsilon b,$$

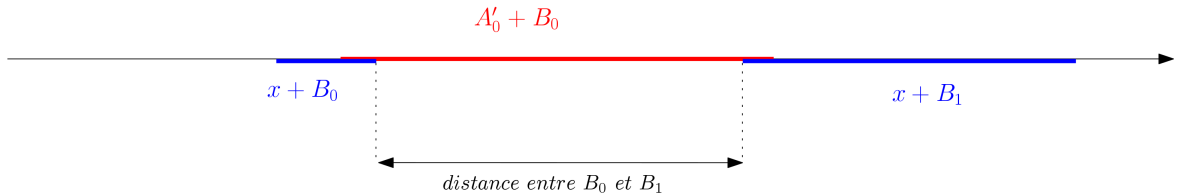
ce qui contredit (4.2.2). Ce cas de figure est donc impossible.

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{2(\tau_K + 1)}$.

b) $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \neq \emptyset$ et $(x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) = \emptyset$:



Commençons par voir que $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \neq \emptyset$ et $(x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) = \emptyset$ impliquent $(x + B_0) \cap (A' + B) = \emptyset$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Comme $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \neq \emptyset$, cela implique que la distance entre B_0 et B_1 est inférieure à la mesure de $A'_0 + B_0$.



Or

$$d(B_0, B_1) \geq 1 - b_+ - b_- \geq 1 - b - \varepsilon b,$$

et

$$\lambda(A'_0 + B_0) \leq \delta b + K\varepsilon b + Kb_+,$$

donc

$$1 - b - \varepsilon b \leq \delta b + K\varepsilon b + Kb_+,$$

or $Kb_+ \leq K(b - b_- + \varepsilon b)$ d'après (2.3.14), donc par l'hypothèse (1.0.5) : $(K + \delta + \varepsilon)b < 1 - \varepsilon b$, on a

$$Kb_- - b \leq 2(K - 1)\varepsilon b,$$

et comme nous sommes dans le second cas, finalement

$$(K - 1)b - K\tau_K\varepsilon b \leq 2(K - 1)\varepsilon b,$$

c'est à dire

$$\varepsilon \geq \frac{K - 1}{2(K - 1) + K\tau_K},$$

ce qui, encore une fois, contredit l'hypothèse (1.0.2) quel que soit $K \geq 2$. Ce n'est donc pas possible et on a bien $(x + B_0) \cap (A' + B) = \emptyset$.

De cette manière on a

$$\begin{aligned} \lambda((x + B) \setminus (A' + B)) &\geq \lambda((x + B_0) \setminus (A' + B)) + \lambda((x + B_1) \setminus (A' + B)) \\ &\geq \lambda(B_0) + \lambda((x + B_1) \setminus (A'_0 + B_0)), \end{aligned}$$

donc d'après le lemme 4.1.2

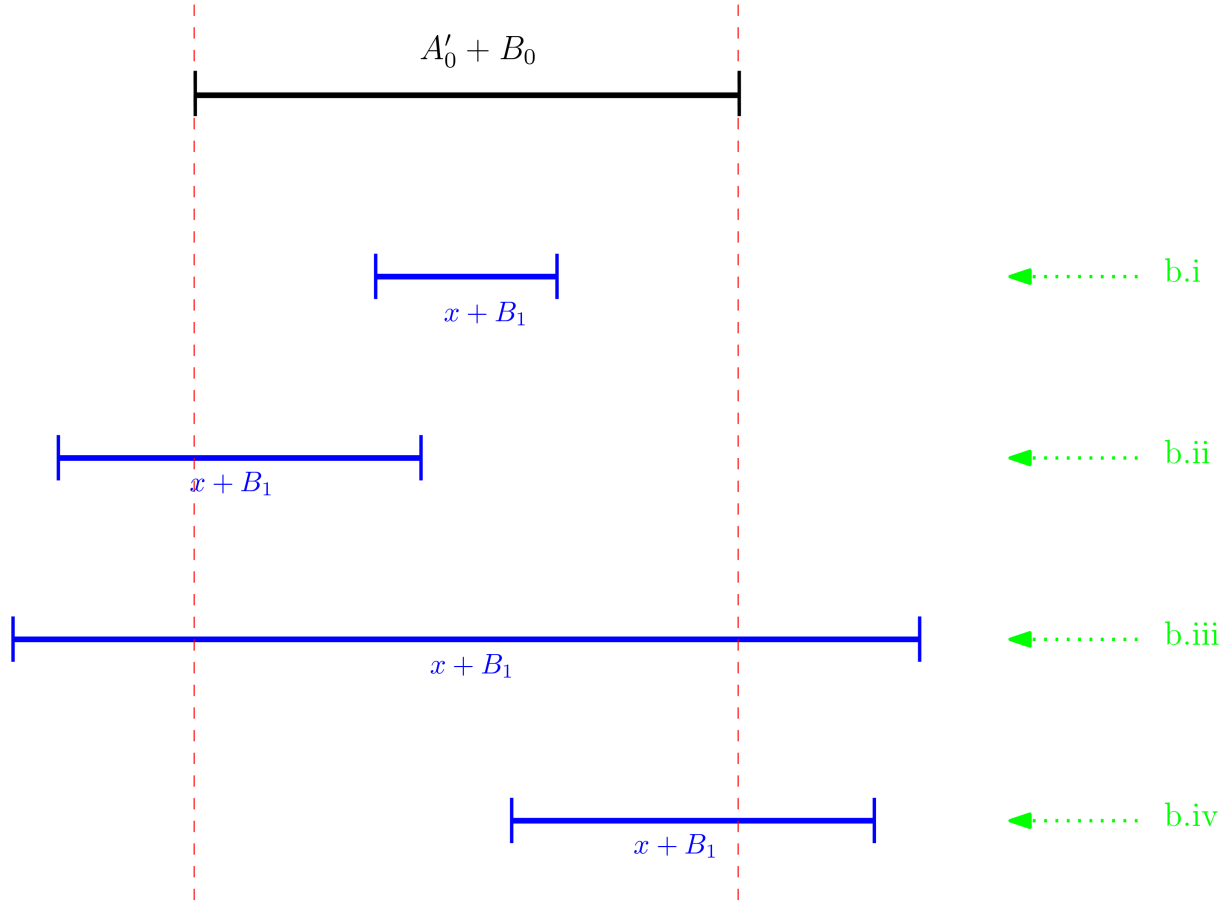
$$\lambda((x + B_1) \setminus (A'_0 + B_0)) \leq \tau_K\varepsilon b - \lambda(B_0), \quad (4.2.3)$$

Remarque 4.2.2. $A'_0 + B_0$ est un intervalle car A'_0 en est un par construction et $\lambda(A'_0) > \text{diam}B_0$. Ainsi

$$(x + B_1) \setminus (A'_0 + B_0) \subseteq]-\infty, \min A'_0[\cup]\max A'_0 + b_+, +\infty[.$$

C'est cette majoration (4.2.3) qui va nous permettre de délimiter une zone dans laquelle x peut se trouver. Mais pour cela, il va nous falloir regarder les différentes formes que peut prendre cet ensemble $(x + B_1) \setminus (A'_0 + B_0)$. Nous allons classer ces différentes configurations possibles en quatre catégories selon la position de $x + 1$ par rapport à $\min A'_0$ et $\max A'_0 + b_+$:

- i) $x + 1 - b_- \geq \min A'_0$ et $1 + x \leq \max A'_0 + b_+$
- ii) $x + 1 - b_- < \min A'_0$ et $1 + x \leq \max A'_0 + b_+$
- iii) $x + 1 - b_- < \min A'_0$ et $1 + x > \max A'_0 + b_+$
- iv) $x + 1 - b_- \geq \min A'_0$ et $1 + x > \max A'_0 + b_+$



b.i. Si $x + 1 - b_- \geq \min A'_0$ et $1 + x \leq \max A'_0 + b_+$.

Alors

$$x \geq \min A'_0 - 1 + b_- \geq \min A'_0 - 1 + b - \tau_K \varepsilon b,$$

et

$$\begin{aligned} x &\leq \max A'_0 - 1 + b_+ \\ &\leq \min A'_0 - 1 + \delta b + K b_+ + K \varepsilon b \\ &\leq \min A'_0 - 1 + \delta b + K \tau_K \varepsilon b + 2K \varepsilon b \quad \text{par (2.3.15)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$x \in \min A'_0 - 1 + b + [-\tau_K \varepsilon b, (\delta + K \tau_K \varepsilon + 2K \varepsilon - 1)b].$$

Remarque 4.2.3. Il se peut que l'ensemble $[b - \tau_K \varepsilon b, \delta b + K \tau_K \varepsilon b + 2K \varepsilon b]$ soit vide. C'est le cas dès que

$$1 \geq (K + 1)\tau_K \varepsilon + \delta + 2K \varepsilon,$$

c'est à dire dès que

$$\varepsilon \leq \frac{1 - \delta}{2K + (K + 1)\tau_K}.$$

b.ii. Si $1 + x - b_- < \min A'_0$ et $1 + x \leq \max A'_0 + b_+$.

Alors d'une part par (2.3.15) on a

$$x \leq \max A'_0 - 1 + b_+ \leq \min A'_0 - 1 + \delta b + K\tau_K \varepsilon b + 2K\varepsilon b.$$

D'autre part, on a

$$[1 + x - b_-, \min A'_0[\cap (x + B_1) \subseteq ((x + B_1) \setminus (A'_0 + B_0)),$$

et donc par (2.3.16), on a

$$\lambda\left([1 + x - b_-, \min A'_0[\cap (x + B_1)\right) \geq \lambda\left([1 + x - b_-, \min A'_0[\right) - \varepsilon b.$$

Ainsi

$$\lambda\left([1 + x - b_-, \min A'_0[\right) \leq \lambda\left((x + B_1) \setminus (A'_0 + B_0)\right) + \varepsilon b,$$

et donc par (4.2.3), on a

$$\lambda\left([1 + x - b_-, \min A'_0[\right) \leq \tau_K \varepsilon b - \lambda(B_0) + \varepsilon b.$$

D'où

$$\begin{aligned} x &\geq \min A'_0 - 1 + b_- + \lambda(B_0) - \tau_K \varepsilon b - \varepsilon b \\ &\geq \min A'_0 - 1 + b - (\tau_K + 1)\varepsilon b, \end{aligned}$$

et donc finalement

$$x \in \min A'_0 - 1 + b + \left[-(\tau_K + 1)\varepsilon b, (\delta + K\tau_K \varepsilon + 2K\varepsilon - 1)b\right].$$

Remarque 4.2.4. La condition $1 + x - b_- < \min A'_0$ nous donne par (2.3.16)

$$x < \min A'_0 - 1 + b_- \leq \min A'_0 - 1 + b + \varepsilon b,$$

ce qui est une meilleure borne si

$$\varepsilon > \frac{1 - \delta}{K\tau_K + 2K - 1}.$$

Nous préférons donc choisir de considérer l'autre condition $1 + x \leq \max A'_0 + b_+$ pour obtenir une borne plus proche de celles des autres cas.

b.iii. Si $1 + x - b_- < \min A'_0$ et $1 + x > \max A'_0 + b_+$.

Alors tout d'abord,

$$\left([1 + x - b_-, \min A'_0[\cup]\max A'_0 + b_+, 1 + x]\right) \cap (x + B_1) \subseteq ((x + B_1) \setminus (A'_0 + B_0)).$$

Ainsi, de la même manière que dans le cas b.ii, par (2.3.16) et (4.2.3), on a

$$\lambda\left([1 + x - b_-, \min A'_0[\right) + \lambda\left(]\max A'_0 + b_+, 1 + x]\right) \leq \tau_K \varepsilon b - \lambda(B_0) + \varepsilon b,$$

c'est à dire

$$\min A'_0 - \max A'_0 + b_- - b_+ \leq \tau_K \varepsilon b - \lambda(B_0) + \varepsilon b,$$

donc

$$b_- \leq \tau_K \varepsilon b + \delta b + (K - 1)b_+ + 2K\varepsilon + \varepsilon b,$$

et comme nous sommes dans le cas **B**,

$$b_- \leq K\tau_K \varepsilon b + \delta b + (2K + 1)\varepsilon.$$

Ainsi

$$x < \min A'_0 - 1 + b_- \leq \min A'_0 - 1 + K\tau_K \varepsilon b + \delta b + (2K + 1)\varepsilon.$$

De plus, en particulier on a

$$\begin{aligned} \tau_K \varepsilon b - \lambda(B_0) &\geq \lambda\left([1 + x - b_-, \min A'_0[\right) - \varepsilon b \\ &\geq \min A'_0 - 1 - x + b_- - \varepsilon b, \end{aligned}$$

d'où

$$x \geq \min A'_0 - 1 - (\tau_K + 1)\varepsilon b + b,$$

et donc finalement

$$x \in \min A'_0 - 1 + b + \left[-(\tau_K + 1)\varepsilon b, \left(\delta + K\tau_K \varepsilon + (2K + 1)\varepsilon - 1 \right) b \right].$$

b.iv. Si $1 + x > \max A'_0 + b_+$ et $x + 1 - b_- \geq \min A'_0$.

Alors ces conditions impliquent d'une part par définition de A'

$$x > \min A'_0 - 1 + Kb_+ + \delta b + K\varepsilon b \geq \min A'_0 - 1 + \delta b + K\varepsilon b,$$

et

$$x > \min A'_0 - 1 + b - \tau_K \varepsilon b.$$

D'autre part,

$$] \max A'_0 + b_+, 1 + x] \cap (x + B_1) \subseteq \left((x + B_1) \setminus (A'_0 + B_0) \right),$$

donc encore une fois par (2.3.16) et (4.2.3) on a

$$\lambda\left(] \max A'_0 + b_+, 1 + x]\right) \leq \tau_K \varepsilon b - \lambda(B_0) + \varepsilon b.$$

D'où

$$\begin{aligned} x &\leq \max A'_0 - 1 + b_+ - \lambda(B_0) + (\tau_K + 1)\varepsilon b \\ &\leq \min A'_0 - 1 + \delta b + (K - 1)b_+ + (2K + \tau_K + 1)\varepsilon b \quad \text{par (2.3.15)} \\ &\leq \min A'_0 - 1 + \delta b + (2K + K\tau_K + 1)\varepsilon b \end{aligned}$$

et donc finalement

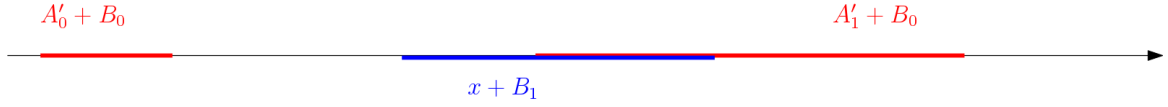
$$x \in \min A'_0 - 1 + \left(\left(\delta b + K\varepsilon b + [0, (K\tau_K + 1)\varepsilon b] \right) \cap \left(b + [-\tau_K \varepsilon, (2K + K\tau_K + 1)\varepsilon + \delta - 1] b \right) \right).$$

b.v. Conclusion du cas **B.b.**

Quel que soit le cas de figure dans lequel on se trouve on a

$$x \in (\min A'_0 - 1 + b) + [-(\tau_K + 1)\varepsilon, (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon + \delta - 1]b.$$

c) $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) = \emptyset$ et $(x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) \neq \emptyset$:



Nous allons suivre à peu près la même stratégie que dans le premier cas et commencer par invoquer le lemme 4.1.2, qui implique

$$\lambda((x + B) \setminus (A' + B)) \leq \tau_K \varepsilon b,$$

puis traduire sur le terme de gauche, le fait qu'on soit dans le cas **B.c**

$$\lambda((x + B) \setminus (A' + B)) = \lambda((x + B_0) \setminus (A'_0 + B_0)) + \lambda((x + B_1) \setminus (A'_1 + B_0)),$$

ainsi

$$\begin{aligned} \tau_K \varepsilon b &\geq \lambda((x + B_0) \setminus (A'_0 + B_0)) + \lambda((x + B_1) \setminus (A'_1 + B_0)) \\ &\geq \lambda(B_0) - \lambda((x + B_0) \cap (A'_0 + B_0)) \\ &\quad + \lambda(B_1) - \lambda((x + B_1) \cap (A'_1 + B_0)) \\ &\geq b - \lambda([x, x + b_+] \cap [\min A', +\infty[) \\ &\quad - \lambda([1 + x - b_-, 1 + x] \cap [1 + \min A' - b_-, +\infty[). \end{aligned}$$

Finalement, soit $[x, x + b_+] \cap [\min A', +\infty[$ est non vide et

$$\begin{aligned} \tau_K \varepsilon b &\geq b - \lambda([\min A', x + b_+]) - \lambda([1 + \min A' - b_-, 1 + x]) \\ &\geq b - (x + b_+ - \min A') - (1 + x - (1 + \min A' - b_-)) \\ &\geq 2(\min A' - x) - \varepsilon b \quad \text{d'après (2.3.14),} \end{aligned}$$

d'où

$$x \geq \min A' - \frac{1}{2}(\tau_K \varepsilon + \varepsilon)b.$$

Soit $[x, x + b_+] \cap [\min A', +\infty[$ est vide et

$$\begin{aligned} \tau_K \varepsilon b &\geq b - \lambda([1 + \min A' - b_-, 1 + x]) \\ &\geq b - (1 + x - (1 + \min A' - b_-)) \\ &\geq \min A' - x + b - b_- \\ &\geq \min A' - x - \varepsilon b \quad \text{d'après (2.3.16),} \end{aligned}$$

d'où

$$x \geq \min A' - (\tau_K \varepsilon + \varepsilon)b.$$

C) Conclusion :

On rappelle que $\min A' = \min A'_0 = a'$, ainsi si nous sommes dans le cas **A**, alors

$$x \in [a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b, a'[,$$

Si nous sommes dans le cas **B**, alors on a vu qu'il y avait les deux possibilités **B.b** et **B.c**. Si nous sommes dans **B.b**, alors

$$x \in (a' - 1 + b) + [-(\tau_K + 1)\varepsilon, (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon + \delta - 1]b,$$

et si nous sommes dans **B.c**

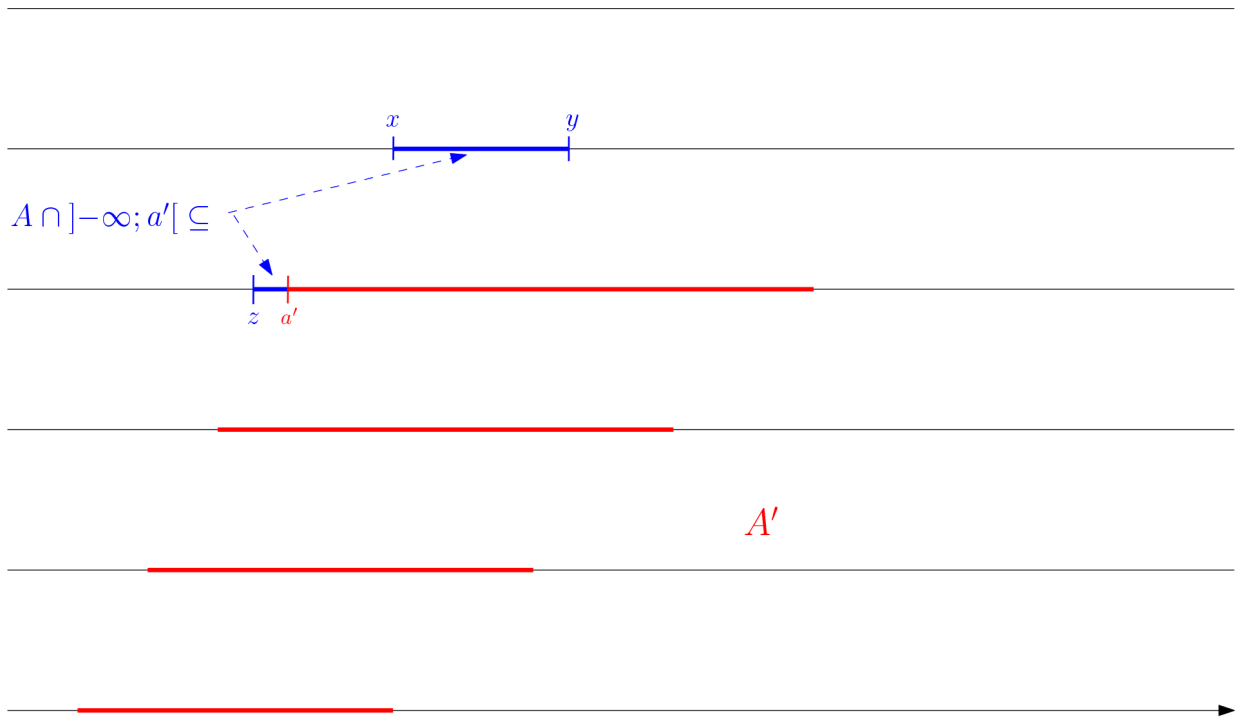
$$x \in [a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b, a'[,$$

tout comme pour le cas **A**. Finalement quel que soit le cas dans lequel on se trouve, on a

$$x \in [a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b, a' + \left(\{0\} \cup [b - 1, (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b + \delta b - 1] \right),$$

ce qui termine la preuve de ce lemme. □

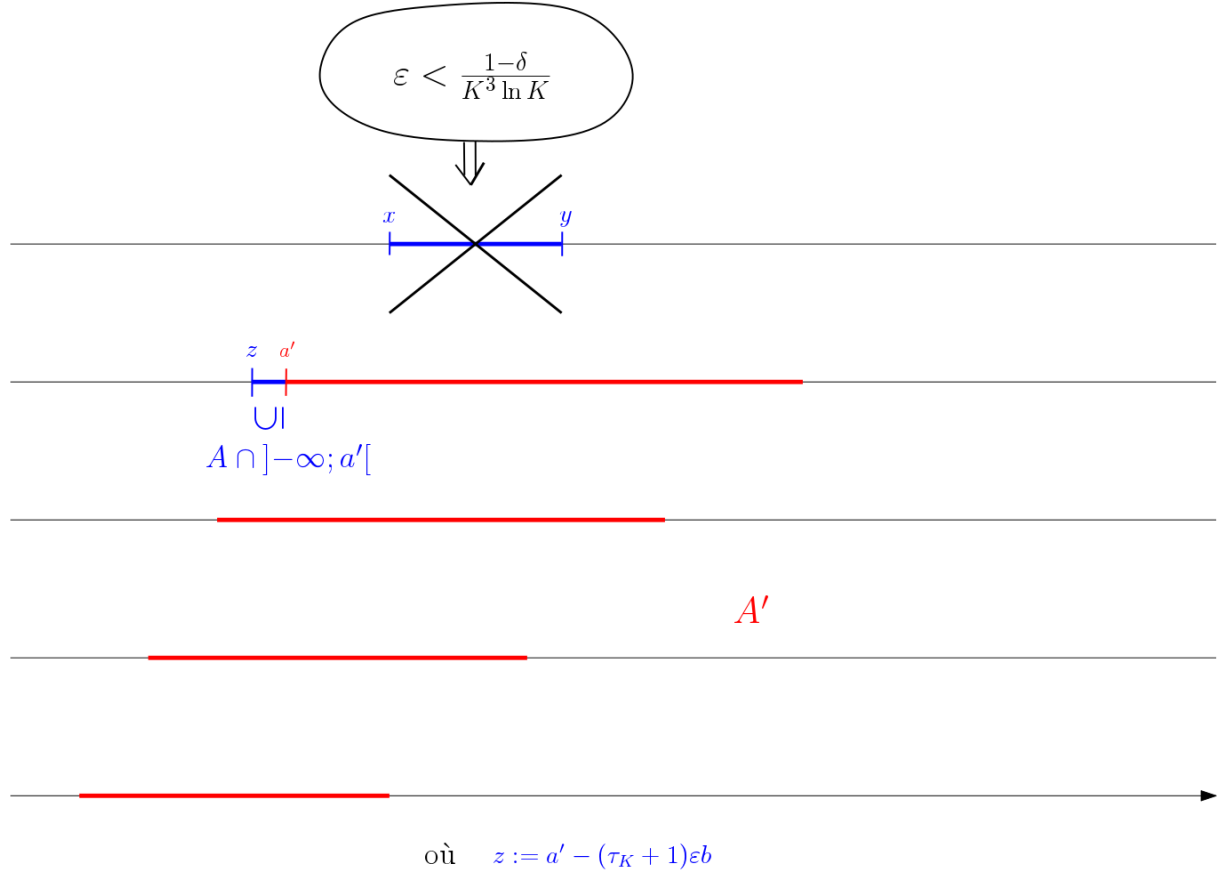
Ce lemme 4.2.1 énonce que les éléments de A inférieurs à A' ne peuvent se trouver essentiellement qu'à deux endroits.



où

$$\begin{aligned} x &:= a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b + b - 1 \\ y &:= a' + (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b + \delta b - 1 \\ z &:= a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b \end{aligned}$$

C'est ici que l'on peut renforcer l'hypothèse $\varepsilon < \frac{1-\delta}{K \log K + 3}$ en $\varepsilon < \frac{(1-\delta)^2}{K^3 \log K}$ ce qui rend la zone la plus éloignée de A' inaccessible et nous permet donc d'affiner le résultat et nous diriger vers la preuve du théorème 0.0.6.



Lemme 4.2.5 (Pour le théorème 0.0.6). *On suppose, en plus des hypothèses du théorème 0.0.7, que $\varepsilon < \frac{1-\delta}{K^3 \log K}$. Soit $x \in A$ tel que $x < \min A'$, on a*

$$x \geq \min A' - (\tau_K + 1)\varepsilon b,$$

où on rappelle que $\tau_K = (K(K+1) \log(K) - K(K(1+\log 4) - 6 + \log 4) + 7)$.

Preuve. Nous allons suivre exactement la même stratégie que dans la preuve du lemme précédent (lemme 4.2.1) sauf que nous allons voir qu'avec l'hypothèse supplémentaire $\varepsilon < \frac{1-\delta}{K^3 \log K}$, le cas **B.b** est impossible. Or c'est la seule possibilité qui peut permettre à un élément de A d'appartenir à

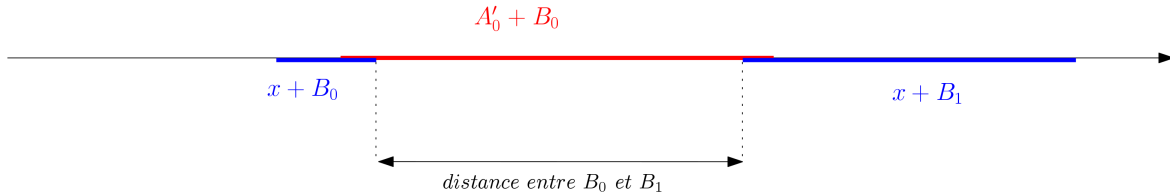
$$\left[a' - (\tau_K \varepsilon + \varepsilon)b + b - 1, a' + (\tau_K \varepsilon + 3\varepsilon)Kb + \delta b - 1 \right].$$

En l'écartant nous prouvons donc le lemme 4.2.5. Reprenons la preuve du lemme précédent et plaçons nous dans les hypothèses du cas **B.b**. On suppose donc que $x \in A$ est tel que $x < \min A'$, $\lambda(B_0) \leq \tau_K \varepsilon b$ et

$$\begin{cases} (x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \neq \emptyset \\ (x + B_1) \cap (A'_1 + B_0) = \emptyset \end{cases} .$$



Commençons par voir que $(x + B_0) \cap (A' + B) = \emptyset$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Comme $(x + B_1) \cap (A'_0 + B_0) \neq \emptyset$, la distance entre B_0 et B_1 est inférieure à la mesure de $A'_0 + B_0$ car $A'_0 + B_0$ est un intervalle.



Or

$$d(B_0, B_1) \geq 1 - b_+ - b_- \geq 1 - b - \varepsilon b,$$

et

$$\lambda(A'_0 + B_0) \leq \delta b + K\varepsilon b + Kb_+.$$

Donc

$$1 - b - \varepsilon b \leq \delta b + K\varepsilon b + Kb_+,$$

or $Kb_+ \leq K(b - b_- + \varepsilon b)$ d'après (2.3.14), donc comme $(K + \delta + \varepsilon)b < 1 - \varepsilon b$ par l'hypothèse (1.0.5), on a

$$Kb_- - b \leq (2K - 1)\varepsilon b,$$

et comme nous sommes avons supposé

$$\lambda(B_0) \leq \tau_K \varepsilon b,$$

finalement

$$(K - 1)b - K\tau_K \varepsilon b \leq (2K - 1)\varepsilon b,$$

c'est à dire

$$\varepsilon \geq \frac{K - 1}{K\tau_K + 2K - 1},$$

ce qui contredit l'hypothèse (1.0.2) quel que soit $K \geq 2$. Ce n'est donc pas possible et on a donc bien $(x + B_0) \cap (A' + B) = \emptyset$.

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{K - 1}{K\tau_K + 2K - 1}$.

De cette manière et d'après le lemme 4.1.2, on a

$$\begin{aligned}
\tau_K \varepsilon b &\geq \lambda((x + B) \setminus (A' + B)) \\
&\geq \lambda((x + B_0) \setminus (A' + B)) + \lambda((x + B_1) \setminus (A' + B)) \\
&\geq \lambda(B_0) + \lambda((x + B_1) \setminus (A'_0 + B_0)) \\
&\geq \lambda(B_0) + \lambda(B_1) - \lambda((A'_0 + B_0) \cap (x + B_1)) \\
&\geq b - \lambda(A'_0 + B_0),
\end{aligned}$$

or par construction de A' puis par (2.3.15) puis parce qu'on est dans le cas **B**, on a

$$\begin{aligned}
\lambda(A'_0 + B_0) &\leq \delta b + K\varepsilon b + (K - 1)b_+ + b_+ \\
&\leq \delta b + K\varepsilon b + K(\lambda(B_0) + \varepsilon b) \\
&\leq \delta b + (K + K(\tau_K + 1))\varepsilon b.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\tau_K \varepsilon b \geq (1 - \delta)b - (K + K(\tau_K + 1))\varepsilon b,$$

ce qui implique

$$\varepsilon \geq \frac{1 - \delta}{2K + (K + 1)\tau_K}.$$

Or $\tau_K = (K(K + 1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7)$, donc

$$\varepsilon \geq \frac{1 - \delta}{K^3 \log K},$$

et contredit l'hypothèse du lemme $\varepsilon < \frac{1 - \delta}{K^3 \log K}$.

Remarque 4.2.6. *En fait, nous n'avons besoin que de l'hypothèse*

$$\varepsilon < \frac{1 - \delta}{2K + (K + 1)\tau_K},$$

mais nous avons opté ici pour plus de lisibilité.

Le cas **B.b** est donc impossible avec cette hypothèse supplémentaire, ce qui termine la démonstration de ce lemme. Pour les autres cas, il suffit en effet de reprendre mot pour mot la preuve du lemme 4.2.1.

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1 - \delta}{2K + (K + 1)\tau_K}$.

□

On choisira donc d'utiliser l'un ou l'autre des deux lemmes précédents pour prouver le théorème 0.0.6 ou le théorème 0.0.7.

Comme annoncé juste avant ces lemmes, il nous suffit de refaire tout le travail effectué jusqu'ici avec $\chi(A)$ et $\chi(B)$ à la place de A et B afin de trouver les deux lemmes correspondants traitant le cas des éléments "après" A' , c'est à dire des éléments supérieurs à $\max A'$.

Lemme 4.2.7. *Soit $x \in A$ tel que $x > \max A'$, on a nécessairement*

$$x \in [\max A' , \max A' + (\tau_K + 1)\varepsilon b[+ \left(\{0\} \cup [1 - \delta b - (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b , 1 - b] \right),$$

où on rappelle que $\tau_K = (K(K + 1)\log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7$.

Preuve. L'idée est d'utiliser χ car cette transformation envoie les éléments inférieurs à A' sur les éléments supérieurs à A' . En particulier $\min \chi(A) = \max(A)$.

Il s'agit d'appliquer le lemme 4.2.1 à $\chi(A)$ et $\chi(B)$ puis d'appliquer à nouveau χ afin d'obtenir des informations sur les éléments de A supérieurs à $\max A'$. Cependant, pour que cette idée fonctionne, il faut que $\chi(A)'$ soit égal à $\chi(A')$. En effet, en appliquant χ une nouvelle fois, on aurait alors $\chi(\chi(A)') = \chi(\chi(A'))$ et $\chi(\chi(A')) = A'$ puisque χ est une involution. Il s'agit donc de montrer que χ envoie bien A' sur $\chi(A)'$.

Premièrement, nous avons translaté A par a page 47 pour pouvoir supposer (2.1.7), mais comme $\chi(\pi(A)) = 1 - \pi(A)$, on peut traduire $\chi(A)$ par $1 - a$ afin d'obtenir la supposition correspondante. Cette étape ne pose donc aucun problème. De plus on rappelle que

$$A' = a' + \bigsqcup_{k=0}^{K-1} [k - kb_-, k + \delta b + K\varepsilon b + (K - k - 1)b_+],$$

donc A' ne dépend que de K, δ, b_+, b_- et a' . Ces objets sont uniquement déterminés par la structure de A et B . Il nous suffit donc de vérifier qu'ils deviennent bien ce qu'on veut lorsqu'ils sont déterminés par $\chi(A)$ et $\chi(B)$.

Tout d'abord, on a $\lambda(\chi(A)) = \lambda(A)$ et $\lambda(\chi(B)) = \lambda(B)$ donc

$$\frac{\lambda(\chi(A))}{\lambda(\chi(B))} = \frac{\lambda(A)}{\lambda(B)},$$

et donc K et δ restent inchangés.

Ensuite, par minimalité de B_0 et B_1 on a $0, b_+, 1 - b_-, 1 \in B$ donc $\chi(B_0) \subseteq [1 - b_-, 1]$ et $\chi(B_1) \subseteq [0, b_+]$. b_- est donc bien envoyé sur b_+ et b_+ est bien envoyé sur b_- .

Enfin $a' = \min \tilde{A}_K$ par définition donc $1 - a' = \min \widetilde{\chi(A)}_K$ et donc $\chi(A') = \chi(A)'$. Et ainsi en appliquant le lemme 4.2.1 à $\chi(A)$ et $\chi(B)$, on a quel que soit $x \in \chi(A)$ tel que $x < \min \chi(A)$

$$x \in [a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b , a'[+ \left(\{0\} \cup [b - 1 , (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b + \delta b - 1] \right),$$

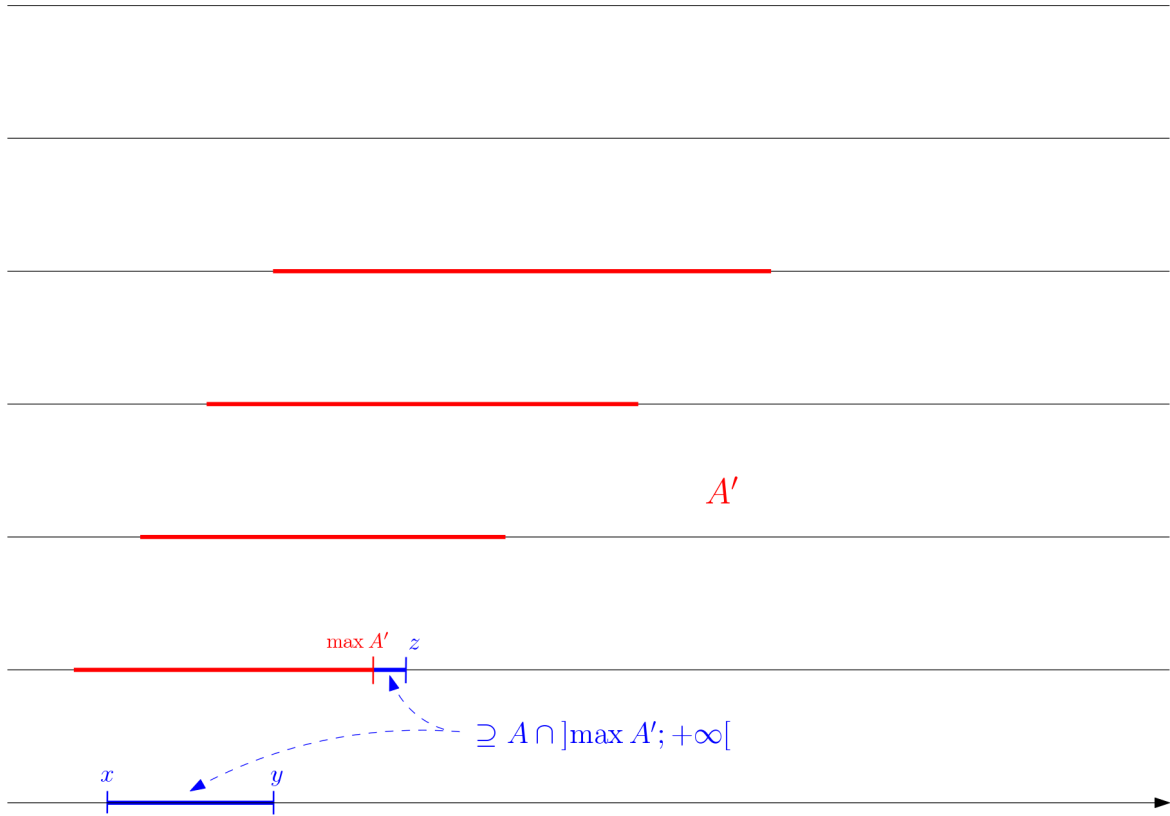
où

$$\tau_K = (K(K + 1)\log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7.$$

Finalement en appliquant χ à nouveau, on obtient le résultat. Si $x \in A$ tel que $x > \max A'$, on a nécessairement

$$x \in [\max A' , \max A' + (\tau_K + 1)\varepsilon b[+ \left(\{0\} \cup [1 - \delta b - (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b , 1 - b] \right).$$

□



où

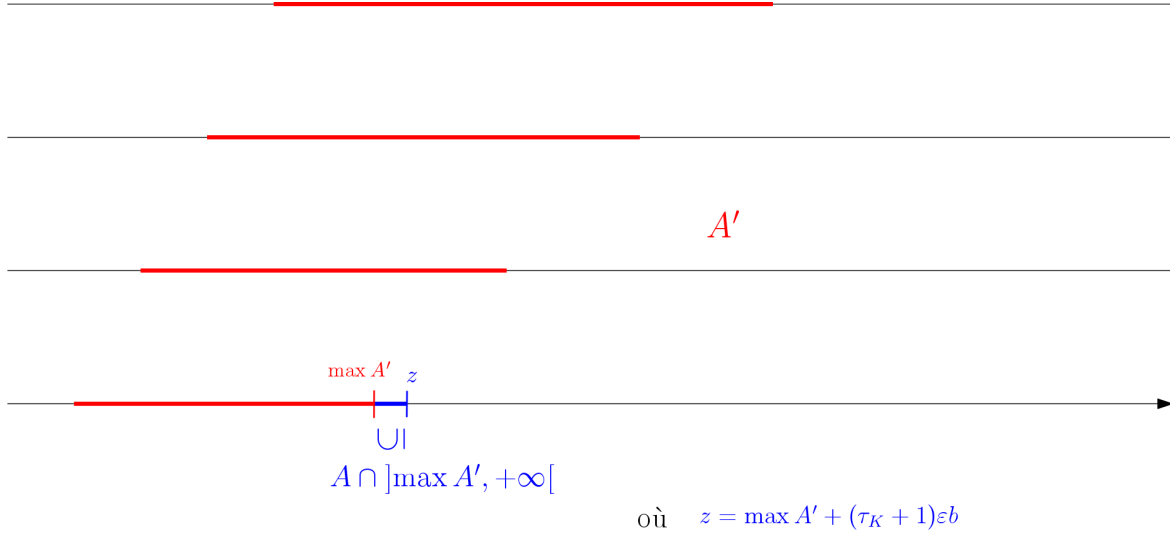
$$\begin{aligned}
 x &:= \max A' + 1 - \delta b - (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b \\
 y &:= \max A' + (\tau_K + 1)\varepsilon b + 1 - b \\
 z &:= \max A' + (\tau_K + 1)\varepsilon b
 \end{aligned}$$

De même on obtient aisément le lemme suivant.

Lemme 4.2.8 (Pour le théorème 0.0.6). *On suppose, en plus des hypothèses du théorème 0.0.7, que $\varepsilon < \frac{1 - \delta}{K^3 \log K}$. Soit $x \in A$ tel que $x > \max A'$, on a nécessairement*

$$x \leq \max A' + (\tau_K + 1)\varepsilon b,$$

où on rappelle que $\tau_K = (K(K + 1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7)$.



Ces deux dernières paires de lemmes traitent les cas des éléments de A en dehors de $[\min A', \max A']$ (avec et sans l'hypothèse supplémentaire). Cependant, un argument élémentaire permet d'affiner les lemmes 4.2.1 et 4.2.7 (dans le cas où nous n'avons pas d'hypothèse supplémentaire donc). C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.2.9. *Soit $x, y \in A$ tels que $x < \min A'$ et $y > \max A'$. Si $\lambda(B_0) > \tau_K \varepsilon b$, on a*

$$x \in [a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b, a'[,$$

Si $\lambda(B_1) > \tau_K \varepsilon b$, on a

$$x \in]\max A', \max A' + (\tau_K + 1)\varepsilon b].$$

On rappelle que $\tau_K = (K(K + 1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4)) + 7$.

Preuve. Soit $x \in A$ tels que $x < \min A'$ et supposons $\lambda(B_0) > \tau_K \varepsilon b$. D'après le lemme 4.2.1, on a

$$x \in [a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b, a' + \left(\{0\} \cup [b - 1, (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b + \delta b - 1] \right).$$

Supposons que $x \in [a' - (\tau_K + 1)\varepsilon b + b - 1, a' + (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b + \delta b - 1]$. On a

$$\sup(x + B_0) \leq a' + (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b + \delta b - 1 + b_+.$$

Or $b_+ \leq b + \varepsilon b$ par (2.3.15), donc

$$\sup(x + B_0) \leq a' + ((K\tau_K + 2K)\varepsilon + 1 + \delta + 2\varepsilon)b - 1.$$

De plus $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K}\right)^3$ par l'hypothèse (1.0.2), donc pour tout $K \geq 2$

$$(K\tau_K + 2K)\varepsilon < K - 1.$$

Ainsi

$$\sup(x + B_0) \leq a' + (K + \delta + 2\varepsilon)b - 1,$$

et donc finalement par l'hypothèse (1.0.5)

$$\sup(x + B_0) \leq a'.$$

Ainsi $x + B_0 \subseteq ((A \setminus A') + B) \setminus ((A \cap A') + B)$. Cependant d'après le lemme 4.1.2, on a

$$\lambda\left(\left((A \setminus A') + B\right) \setminus \left((A \cap A') + B\right)\right) \leq \tau_K \varepsilon b,$$

d'où

$$\lambda(x + B_0) = \lambda(B_0) \leq \tau_K \varepsilon b,$$

ce qui contredit notre hypothèse et prouve donc la première partie de ce lemme. Encore une fois, on obtient aisément la seconde partie du lemme en utilisant l'application χ puis en reprenant le même raisonnement.

$$\text{Nous avons eu besoin de } \varepsilon < \frac{K-1}{K\tau_K + 2K}.$$

□

Remarque 4.2.10. Comme $\tau_K = (K(K+1)\log(K) - K(K(1+\log 4) - 6 + \log 4)) + 7$ et comme on a l'hypothèse (1.0.2),

$$\varepsilon < \frac{1}{2\tau_K}.$$

Ainsi

$$\max(\lambda(B_0), \lambda(B_1)) \geq \frac{b}{2} > \tau_K \varepsilon b.$$

De cette manière, on peut toujours appliquer l'une ou l'autre des deux parties de ce lemme (4.2.9). Ce constat nous sera utile pour prouver le théorème 0.0.7.

Nous avons désormais fini de traiter le cas des éléments de A hors de $[\min A', \max A']$ et pouvons donc passer à la partie suivante.

4.3 Le cas des éléments de $A \setminus A'$ dans $[\min A', \max A']$

On rappelle encore une fois que

$$A' = a' + \bigsqcup_{k=0}^{K-1} [k - kb_-, k + \delta b + K\varepsilon b + (K - k - 1)b_+],$$

et qu'on a posé pour tout $k \in \{0, \dots, K-1\}$

$$A'_k = a' + [k - kb_-, k + \delta b + K\varepsilon b + (K - k - 1)b_+],$$

de sorte que $A' = \bigsqcup_{k=0}^{K-1} A'_k$ (on peut voir A'_k comme le k -ème étage de A').

Nous avons traité, dans la partie précédente, le cas des éléments de $A \setminus A'$ se trouvant avant $\min A'$ et après $\max A'$. Il nous reste donc à traiter le cas des éléments de $A \setminus A'$ se trouvant dans $[\min A', \max A']$, c'est à dire se trouvant entre deux morceaux consécutifs de A' .

Nous allons voir que si x est un élément de $A \setminus A'$ et si x se trouve entre deux morceaux consécutifs de A' , c'est à dire si $x \in]\max A'_k, \min A'_{k+1}[$ pour un certain $k \in \{0, \dots, K-1\}$, alors x est nécessairement très proche de l'un des deux morceaux A'_k ou A'_{k+1} . Ainsi nous allons prouver que tous les éléments de A se trouvent dans un fin manteau autour de A' (dont nous maîtrisons l'épaisseur) et obtiendrons donc les théorèmes 0.0.6 et 0.0.7.

Nous allons tout de même devoir découper cette dernière phase en deux parties car dans certains cas extrêmes, il se peut que $\lambda(]\max A'_0, \min A'_1[)$ ou $\lambda(]\max A'_{K-2}, \min A'_{K-1}[)$ soient trop petites et posent quelques soucis. Nous traiterons donc à part les premier et dernier étages.

La première partie ne posant pas de souci, elle sera commune aux preuves du théorème 0.0.6 et du théorème 0.0.7. La seconde en revanche diffèrera dans les preuves de ces théorèmes car le renforcement des hypothèses dans le théorème 0.0.6 nous permettra d'éviter les cas trop extrêmes.

4.3.1 Le cas des éléments x de $A \setminus A'$ dans $]\max A'_k, \min A'_{k+1}[$ pour $k \in \{1, \dots, K-2\}$

Lemme 4.3.1. *Si $k \in \{1, \dots, K-2\}$ et si x est un élément de A tel que $x \in]\max A'_k, \min A'_{k+1}[$, alors*

$$d(x, A') \leq (\tau_K + 1)\varepsilon b,$$

où on rappelle que $\tau_K = (K(K+1)\log(K) - K(K(1+\log 4) - 6 + \log 4) + 7)$.

Preuve. Soit $k \in \{1, \dots, K-2\}$ et $x \in A \cap]\max A'_k, \min A'_{k+1}[$. On peut supposer que $\lambda(B_0) \geq b/2$. Sinon cela signifie que $\lambda(B_1) \geq b/2$ et donc quitte à appliquer χ , on se ramène à $\chi(B_0) \geq b/2$.

Nous allons raisonner par l'absurde, supposons que $d(x, A') > (\tau_K + 1)\varepsilon b$, ce qui implique que

$$\lambda(]\max A'_k, \min A'_{k+1}[) > 2(\tau_K + 1)\varepsilon b,$$

et donc

$$x \in]\max A'_k + (\tau_K + 1)\varepsilon b, \min A'_{k+1} - (\tau_K + 1)\varepsilon b[.$$

On a

$$\lambda((x + B_0) \setminus (A' + B)) \geq \lambda((x + B_0) \cap]\max A'_k + b_+, \min A'_{k+1}[). \quad (4.3.1)$$

Or on rappelle que le lemme (4.1.2) donne la majoration

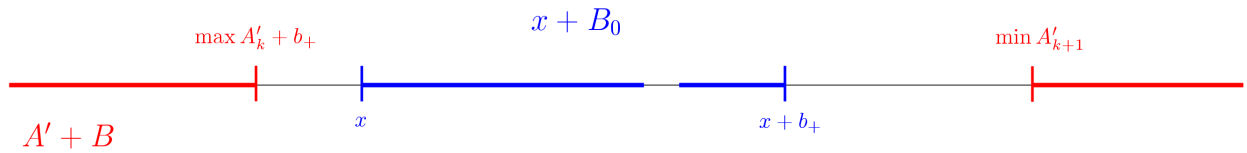
$$\lambda(((A \setminus A') + B) \setminus ((A \cap A') + B)) \leq \tau_K \varepsilon b.$$

Nous allons voir que ces deux dernières inégalités sont en contradiction. Pour cela nous allons distinguer les quatre configurations possibles :

- $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_k + b_+[= \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_{k+1}, +\infty[= \emptyset$
- $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_k + b_+[\neq \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_{k+1}, +\infty[\neq \emptyset$
- $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_k + b_+[\neq \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_{k+1}, +\infty[= \emptyset$
- $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_k + b_+[= \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_{k+1}, +\infty[\neq \emptyset$

et nous allons voir que quelle que soit la configuration dans laquelle on se trouve, $\lambda((x + B_0) \setminus (A' + B))$ est trop gros (supérieur à $\tau_K \varepsilon b$) et nous amène donc à une absurdité.

Cas 1 : $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_k + b_+[= \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_{k+1}, +\infty[= \emptyset$



Dans ce cas on a alors $x + B_0 \subseteq]\max A'_k + b_+, \min A'_{k+1}[$, et donc

$$\lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_k + b_+, \min A'_{k+1}[\right) \geq \lambda(B_0) \geq \frac{b}{2}.$$

Or $\frac{b}{2} > \tau_K \varepsilon b$, car $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K}\right)^3$ par l'hypothèse (1.0.2) et quel que soit $K \geq 2$

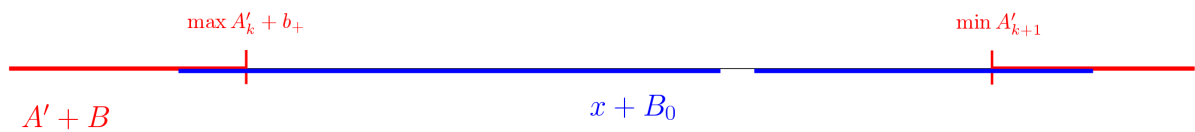
$$\left(\frac{\delta}{3K}\right)^3 \leq \frac{1}{2\tau_K}.$$

On rappelle que $\tau_K \varepsilon = (K(K + 1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7)$. Ainsi finalement

$$\lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_k + b_+, \min A'_{k+1}[\right) > \tau_K \varepsilon b.$$

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{2\tau_K}$.

Cas 2 : $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_k + b_+[\neq \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_{k+1}, +\infty[\neq \emptyset$



On rappelle ici que $B_0 \subseteq [0, b_+]$ et $b_+ \leq b + \varepsilon b$ (cf. (2.3.15)), donc

$$\begin{aligned} \lambda\left((x + B_0) \cap \right] \max A'_k + b_+, \min A'_{k+1} [&\geq \lambda\left([x, x + b_+] \cap \right] \max A'_k + b_+, \min A'_{k+1} [\\ &\quad - \lambda\left([x, x + b_+] \setminus (x + B_0)\right) \\ &\geq \lambda\left(\right] \max A'_k + b_+, \min A'_{k+1} [) - \varepsilon b, \end{aligned}$$

or comme $k \in \{1, \dots, K - 2\}$

$$\begin{aligned} \lambda\left(\right] \max A'_k + b_+, \min A'_{k+1} [) &= 1 - (k + 1)b_- - (K - k)b_+ - \delta b - K\varepsilon b \\ &\geq 1 - 2(b + \varepsilon b) - (k - 1)b_- - (K - 2 - k)b_+ - \delta b - K\varepsilon b \\ &\geq 1 - (K + \delta + 2\varepsilon)b + b - (2K - 3)\varepsilon b \\ &> b - (2K - 3)\varepsilon b, \end{aligned}$$

où la dernière ligne provient de l'hypothèse $\lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon)b < \lambda(A) + 1 - \varepsilon b$ (hypothèse (1.0.5)). Ainsi

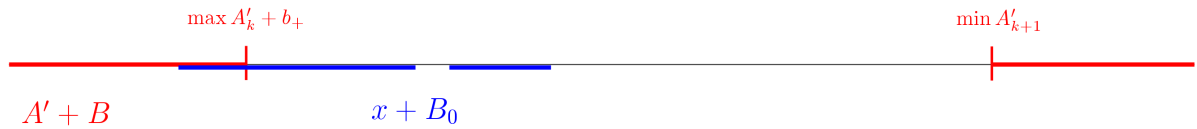
$$\lambda\left((x + B_0) \cap \right] \max A'_k + b_+, \min A'_{k+1} [) \geq b - 2(K - 1)\varepsilon b,$$

or $b - 2(K - 1)\varepsilon b > \tau_K \varepsilon b$ quel que soit $K \geq 2$, car $\varepsilon < \left(\frac{\delta}{3K}\right)^3$ par l'hypothèse (1.0.2). Ainsi finalement

$$\lambda\left((x + B_0) \cap \right] \max A'_k + b_+, \min A'_{k+1} [) > \tau_K \varepsilon b.$$

Nous avons eu besoin de $\varepsilon < \frac{1}{\tau_K + 2K - 3}$.

Cas 3 : $(x + B_0) \cap] -\infty, \max A'_k + b_+ [\neq \emptyset$ et $(x + B_0) \cap] \min A'_{k+1}, +\infty [= \emptyset$



On a

$$\begin{aligned} &\lambda\left((x + B_0) \cap \right] \max A'_k + b_+, \min A'_{k+1} [) \\ &\geq \lambda\left((x + [0, b_+]) \cap \right] \max A'_k + b_+, \min A'_{k+1} [) - \lambda\left((x + [0, b_+]) \setminus (x + B_0)\right) \\ &\geq \lambda\left(\right] \max A'_k + b_+, x + b_+ [) - \left(\lambda([0, b_+]) - \lambda(B_0)\right), \end{aligned}$$

et comme $x \in]\max A'_k + (\tau_K + 1)\varepsilon b, \min A'_{k+1} - (\tau_K + 1)\varepsilon b[$, $B_0 \subseteq [0, b_+]$ et $b_+ \leq b + \varepsilon b$, on a

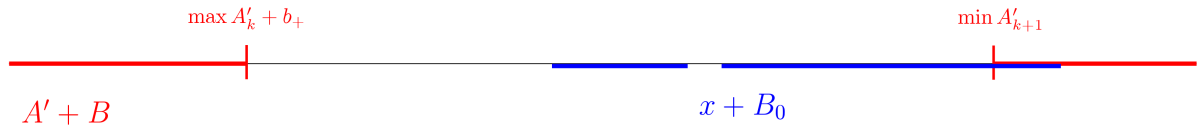
$$\lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_k + b_+, \min A'_{k+1}[\right) > (\tau_K + 1)\varepsilon b - \varepsilon b,$$

c'est à dire

$$\lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_k + b_+, \min A'_{k+1}[\right) > \tau_K \varepsilon b.$$

Il est possible d'être un peu plus fin ici, mais cet argument suffit à notre objectif.

Cas 4 : $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_k + b_+[= \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_{k+1}, +\infty[\neq \emptyset$



Ce cas est similaire au précédent et on a

$$\lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_k + b_+, \min A'_{k+1}[\right) > \tau_K \varepsilon b.$$

Finalement, quel que soit le cas dans lequel on se trouve, on a toujours

$$\lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_k + b_+, \min A'_{k+1}[\right) > \tau_K \varepsilon b,$$

et donc par (4.3.1)

$$\lambda\left((x + B_0) \setminus (A' + B)\right) > \tau_K \varepsilon b.$$

Mais $(x + B_0) \setminus (A' + B) \subseteq ((A \setminus A') + B) \setminus ((A \cap A') + B)$, donc

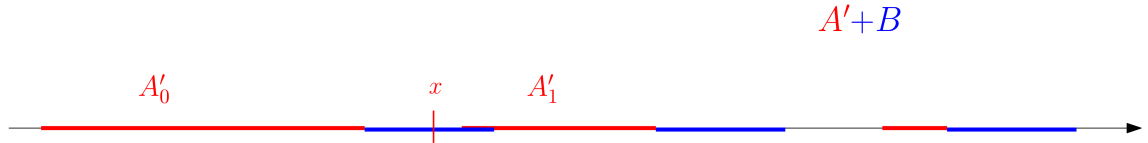
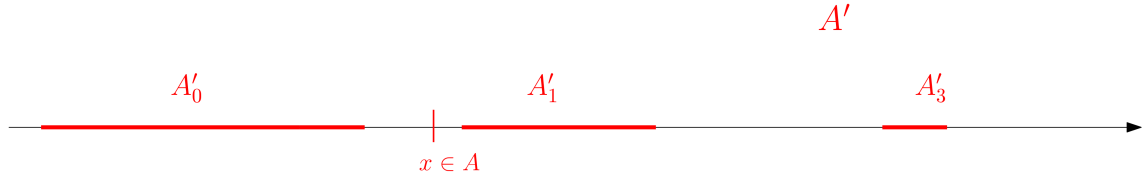
$$\lambda\left(((A \setminus A') + B) \setminus ((A \cap A') + B)\right) > \tau_K \varepsilon b,$$

ce qui contredit le lemme 4.1.2 et nous donne donc l'absurdité. Ainsi $d(x, A') \leq (\tau_K + 1)\varepsilon b$ ce qui termine la preuve de ce lemme. \square

Il nous reste donc simplement à traiter le cas des éléments de A entre les deux premiers morceaux de A' et entre les deux derniers morceaux de A' .

4.3.2 Le cas des éléments de A appartenant à $] \max A'_0, \min A'_1[$ ou à $] \max A'_{K-2}, \min A'_{K-1}[$

Nous n'avons pas pu traiter ces zones avec les autres dans la partie précédente car dans certains cas extrêmes, elles peuvent poser problème. En effet, si par exemple B_1 est réduit à $\{1\}$ et si $(K + \delta + \varepsilon)b$ est proche de 1 alors il se peut que $A'_0 + B_0$ intersecte A'_1 . Ainsi un élément de A pourrait se trouver n'importe où entre A'_0 et A'_1 sans qu'il ne rajoute la moindre contribution à la mesure de S quand on somme par B .



Pour qu'un tel phénomène se produise, il faut donc que $\lambda(B_1)$ soit très petite et que $(K + \delta + \varepsilon)b$ soit très grand. Ou de manière symétrique pour $] \max A'_{K-2}, \min A'_{K-1} [$, il faudrait que $\lambda(B_0)$ soit très petite et que $(K + \delta + \varepsilon)b$ soit très grand. En ajoutant l'hypothèse qu'au moins l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite

- $(K + \delta + (\tau_K + 2K)\varepsilon)b < 1$
- $\min(\lambda(B_0), \lambda(B_1)) \geq \frac{\tau_K + K}{K - 1} \varepsilon b$

dans le théorème 0.0.6, on évite donc ces phénomènes extrêmes. C'est l'objet des deux lemmes suivants. Le premier traite le cas des éléments de $] \max A'_0, \min A'_1 [$ et le second ajoute le cas des éléments de $] \max A'_{K-2}, \min A'_{K-1} [$ en appliquant, comme d'habitude, la transformation χ .

Lemme 4.3.2. *Soit x un élément de A tel que $x \in] \max A'_0, \min A'_1 [$. Si l'une des deux conditions suivantes est réunie*

- $(K + \delta + (\tau_K + 2K)\varepsilon)b < 1$
- $\lambda(B_1) \geq \frac{\tau_K + K}{K - 1} \varepsilon b$

alors $d(x, A') \leq (\tau_K + 1)\varepsilon b$, où on rappelle que

$$\tau_K = (K(K + 1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7).$$

Preuve. Soit $x \in A \cap] \max A'_0, \min A'_1 [$. Nous allons reprendre la preuve du lemme 4.3.1 mais allons modifier le cas 2. En effet, c'est le seul qui utilise le fait que $k \in \{1, \dots, K - 2\}$. Nous pouvons reprendre les trois autres cas à l'identique pour $k = 0$ à une petite chose près, dans la preuve du lemme 4.3.1, nous avons pu supposer "gratuitement" que $\lambda(B_0) \geq \frac{b}{2}$ sous peine d'appliquer χ . Or ici, nous voulons appliquer χ une fois le lemme prouvé pour obtenir le résultat correspondant pour $] \max A'_{K-2}, \min A'_{K-1} [$. Nous ne pouvons donc plus faire cette supposition et devons considérer le cas où c'est $\lambda(B_1)$ qui est supérieure

ou égale à $b/2$. Nous allons voir que ça ne pose aucun problème et qu'on retombe aisément sur des cas traités dans la preuve du lemme 4.3.1. La preuve du cas 2, en revanche, ne fonctionne plus du tout pour $k = 0$ quand c'est $\lambda(B_0)$ qui est supérieure à $b/2$. Il nous faudra ajouter l'une ou l'autre des deux conditions supplémentaires, pour obtenir le résultat. En effet, nous verrons que sous l'une ou l'autre de ces deux conditions, $\max A'_0 + b_+$ est suffisamment inférieur à $\min A'_1$ pour que $\lambda\left(] \max A'_k + b_+, \min A'_{k+1}[\right)$ soit assez grande pour obtenir l'absurdité.

Débutons donc la même stratégie que dans la preuve du lemme 4.3.1. Supposons que $d(x, A') > (\tau_K + 1)\varepsilon b$, c'est à dire

$$x \in] \max A'_0 + (\tau_K + 1)\varepsilon b, \min A'_1 - (\tau_K + 1)\varepsilon b[.$$

Commençons par traiter le cas où c'est B_1 qui a une mesure supérieure à $b/2$.

A) On suppose que $\lambda(B_1) \geq b/2$.

On a d'une part

$$\lambda\left((x + B_1) \setminus (A' + B)\right) \geq \lambda\left((x + B_1) \cap] \max A'_1 + b_+, \min A'_2[\right),$$

et d'autre part, $(x + B_1) \setminus (A' + B) \subseteq \left((A \setminus A') + B\right) \setminus \left((A \cap A') + B\right)$, donc par le lemme 4.1.2

$$\lambda\left((x + B_1) \setminus (A' + B)\right) \leq \tau_K \varepsilon b.$$

Ainsi

$$\lambda\left((x + B_1) \cap] \max A'_1 + b_+, \min A'_2[\right) \leq \tau_K \varepsilon b. \quad (4.3.2)$$

Or nous avons vu dans la preuve du lemme 4.3.1 que c'était impossible. En effet, il suffit de reprendre la preuve avec $k = 1$ et avec x' et B'_0 définis par $x' = 1 + x - b_-$ et $B'_0 = \chi(B_1)$. On a bien $x' \in] \max A'_1 + (\tau_K + 1)\varepsilon b, \min A'_2 - (\tau_K + 1)\varepsilon b[$ et $\lambda(B'_0) \geq \frac{b}{2}$. Ainsi on retombe bien sur les quatre configurations possibles :

- $(x' + B'_0) \cap]-\infty, \max A'_1 + b_+[= \emptyset$ et $(x' + B'_0) \cap]\min A'_2, +\infty[= \emptyset$
- $(x' + B'_0) \cap]-\infty, \max A'_1 + b_+[\neq \emptyset$ et $(x' + B'_0) \cap]\min A'_2, +\infty[\neq \emptyset$
- $(x' + B'_0) \cap]-\infty, \max A'_1 + b_+[\neq \emptyset$ et $(x' + B'_0) \cap]\min A'_2, +\infty[= \emptyset$
- $(x' + B'_0) \cap]-\infty, \max A'_1 + b_+[= \emptyset$ et $(x' + B'_0) \cap]\min A'_2, +\infty[\neq \emptyset$

Nous avons vu qu'elles menaient toutes à une contradiction de (4.3.2). Ainsi $d(x, A') \leq (\tau_K + 1)\varepsilon b$, ce qui prouve ce lemme dans le cas où $\lambda(B_1) \geq \frac{b}{2}$.

B) On suppose que $\lambda(B_0) \geq b/2$.

On a d'une part

$$\lambda\left((x + B_0) \setminus (A' + B)\right) \geq \lambda\left((x + B_0) \cap] \max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right),$$

et d'autre part, $(x + B_0) \setminus (A' + B) \subseteq ((A \setminus A') + B) \setminus ((A \cap A') + B)$, donc par le lemme 4.1.2

$$\lambda\left((x + B_0) \setminus (A' + B)\right) \leq \tau_K \varepsilon b.$$

$$\lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) \leq \tau_K \varepsilon b. \quad (4.3.3)$$

On va alors distinguer les quatre configurations possibles :

- $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_0 + b_+[= \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_1, +\infty[= \emptyset$
- $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_0 + b_+[\neq \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_1, +\infty[\neq \emptyset$
- $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_0 + b_+[\neq \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_1, +\infty[= \emptyset$
- $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_0 + b_+[= \emptyset$ et $(x + B_0) \cap]\min A'_1, +\infty[\neq \emptyset$

et nous allons voir que quelle que soit la configuration dans laquelle on se trouve, $\lambda\left((x + B_0) \setminus (A' + B)\right)$ est trop gros et contredit donc (4.3.3). Comme annoncé plus haut, nous allons traiter le cas 2 séparément des trois autres cas.

a) Cas 2 avec l'hypothèse supplémentaire $(K + \delta + K^2 \log(K)\varepsilon)b < 1$.

Nous sommes ici dans le cas 2 et on suppose donc que $(x + B_0) \cap]-\infty, \max A'_0 + b_+[\neq \emptyset$ et que $(x + B_0) \cap]\min A'_1, +\infty[\neq \emptyset$. On rappelle que $B_0 \subseteq [0, b_+]$ et $b_+ \leq b + \varepsilon b$ (cf. (2.3.15)), donc

$$\begin{aligned} \lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) &\geq \lambda\left([x, x + b_+] \cap]\max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) \\ &\quad - \lambda\left([x, x + b_+] \setminus (x + B_0)\right) \\ &\geq \lambda\left(]\max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) - \varepsilon b. \end{aligned}$$

Or par définition de A' , on a

$$\begin{aligned} \lambda\left(]\max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) &= 1 - b_- - Kb_+ - \delta b - K\varepsilon b \\ &\geq 1 - (b + \varepsilon b) - (K - 1)b_+ - \delta b - K\varepsilon b \quad \text{par (2.3.14)} \\ &\geq 1 - K(b + \varepsilon b) - \delta b - K\varepsilon b \quad \text{par (2.3.15)} \\ &\geq 1 - (K + \delta + (\tau_K + 2K)\varepsilon)b + \tau_K \varepsilon b \\ &> \tau_K \varepsilon b, \end{aligned}$$

où la dernière ligne provient de notre hypothèse supplémentaire $(K + \delta + (\tau_K + 2K)\varepsilon)b < 1$. Ainsi

$$\lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) > \tau_K \varepsilon b,$$

ce qui contredit directement (4.3.3).

b) Cas 2 avec l'hypothèse supplémentaire $\lambda(B_1) \geq (K+2)(\log K + 3)\varepsilon b$.

Nous allons reprendre ici exactement la même stratégie et appliquerons simplement une autre minoration à la fin. On a toujours

$$\lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) \geq \lambda\left(] \max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) - \varepsilon b,$$

et

$$\lambda\left(] \max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) = 1 - b_- - Kb_+ - \delta b - K\varepsilon b.$$

C'est ici que les raisonnements diffèrent. On a

$$\begin{aligned} \lambda\left(] \max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) &= 1 - b_- - Kb_+ - \delta b - K\varepsilon b \\ &\geq 1 - (b + \varepsilon b) - (K-1)b_+ - \delta b - K\varepsilon b \quad \text{par (2.3.14)} \\ &\geq 1 - (b + \varepsilon b) - (K-1)(b - b_- + \varepsilon b) - \delta b - K\varepsilon b \quad \text{par (2.3.14)} \\ &\geq 1 - (K + \delta + 2\varepsilon)b + (K-1)b_- - 2(K-1)\varepsilon b \\ &> (K-1)b_- - 2(K-1)\varepsilon b, \end{aligned}$$

par l'hypothèse $(K + \delta + \varepsilon)b < 1 - \varepsilon b$ (hypothèse (1.0.5)). Enfin, il nous suffit d'appliquer notre hypothèse supplémentaire $\lambda(B_1) \geq \frac{\tau_K + K}{K-1}\varepsilon b$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \lambda\left(] \max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) &> (K-1)b_- - 2(K-1)\varepsilon b \\ &\geq (K-1)(\lambda(B_1) + \varepsilon b) - 2(K-1)\varepsilon b \quad \text{par (2.3.16)} \\ &\geq (K-1)\frac{\tau_K + K}{K-1}\varepsilon b - (K-1)\varepsilon b \\ &\geq (\tau_K + 1)\varepsilon b. \end{aligned}$$

Donc finalement

$$\begin{aligned} \lambda\left((x + B_0) \cap]\max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) &\geq \lambda\left(] \max A'_0 + b_+, \min A'_1[\right) - \varepsilon b \\ &> (\tau_K + 1)\varepsilon b - \varepsilon b \\ &> \tau_K \varepsilon b, \end{aligned}$$

ce qui contredit encore une fois (4.3.3).

c) Cas 1,3 et 4.

Comme $\lambda(B_0) \geq b/2$, il suffit de reprendre à l'identique la preuve de ces trois cas dans le lemme 4.3.1 avec $k = 0$. Nous n'avions pas besoin de supposer $k \neq 0$ dans ces trois cas.

Ainsi quel que soit le cas dans lequel on se trouve, nous arrivons à une absurdité et donc $d(x, A') \leq (\tau_K + 1)\varepsilon b$, ce qui prouve ce lemme également dans le cas où $\lambda(B_0) \geq b/2$. \square

Comme d'habitude, en appliquant χ , on obtient le résultat analogue pour $k = K-1$, ce qui conduit au lemme suivant.

Lemme 4.3.3. Soit x un élément de A tel que $x \in]\max A'_{K-2}, \min A'_{K-1}[$. Si l'une des deux conditions suivantes est réunie

- $(K + \delta + (\tau_K + 2K)\varepsilon)b < 1$

- $\lambda(B_0) \geq \frac{\tau_K + K}{K - 1}\varepsilon b$

alors $d(x, A') \leq (\tau_K + 1)\varepsilon b$, où on rappelle que

$$\tau_K = (K(K + 1)\log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4)) + 7.$$

En regroupant les deux lemmes 4.3.2 et 4.3.3, on obtient le lemme suivant.

Lemme 4.3.4. Soit x un élément de A tel que $x \in]\max A'_0, \min A'_1[\cup]\max A'_{K-2}, \min A'_{K-1}[$. Si l'une des deux conditions suivantes est réunie

- $(K + \delta + (\tau_K + 2K)\varepsilon)b < 1$

- $\min(\lambda(B_0), \lambda(B_1)) \geq \frac{\tau_K + K}{K - 1}\varepsilon b$

alors $d(x, A') \leq (\tau_K + 1)\varepsilon b$, où on rappelle que

$$\tau_K = (K(K + 1)\log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4)) + 7.$$

Remarque 4.3.5. Comme $\tau_K = (K(K + 1)\log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4)) + 7$ et comme on a l'hypothèse (1.0.2),

$$\varepsilon < \frac{K - 1}{2(\tau_K + K)}.$$

Ainsi

$$\max(\lambda(B_0), \lambda(B_1)) \geq \frac{b}{2} \geq \frac{\tau_K + K}{K - 1}\varepsilon b.$$

De cette manière, on peut toujours appliquer l'un ou l'autre des lemmes 4.3.2 et 4.3.3. De plus si $b_+ = b_-$, nous pouvons utiliser les deux lemmes. Ces constats nous seront utiles pour prouver le théorème 0.0.7.

Ce dernier lemme 4.3.4 était le maillon manquant pour nous permettre de prouver le théorème 0.0.6 et nous avons donc désormais tout en main pour achever la démonstration.

Pour le théorème 0.0.7 en revanche, n'ayant pas d'hypothèse supplémentaire, nous ne pouvons rien dire quant aux éléments de A se trouvant dans $] \max A'_0, \min A'_1[$ ou dans $] \max A'_{K-2}, \min A'_{K-1}[$. Comme expliqué précédemment, il se peut que dans certains cas extrêmes, des éléments de A se retrouvent n'importe où dans ces intervalles. C'est pour cela que ces zones ne sont pas "affinées" dans le théorème 0.0.7. Cependant, la remarque 4.3.5 nous permet tout de même d'écarter l'une de ces deux zones selon lequel de b_+ ou b_- est le plus grand. Nous avons donc également tout en main pour pouvoir démontrer ce théorème.

Conclusion des preuves des théorèmes 0.0.4, 0.0.6 et 0.0.7

Les trois premières parties nous donnent les premières informations nécessaires à la démonstration des théorèmes 0.0.6 et 0.0.7. À la fin de la partie 2, nous connaissons déjà la structure de B :

$$B = B_0 \sqcup B_1,$$

où $B_0 \subseteq [0, b_+]$, $B_1 \subseteq [1 - b_-, 1]$, $\{b_+, 1 - b_-\} \subset B$ et $b_+ + b_- \leq b + \min_{i=1, \dots, K} \varepsilon_i^2 b$.

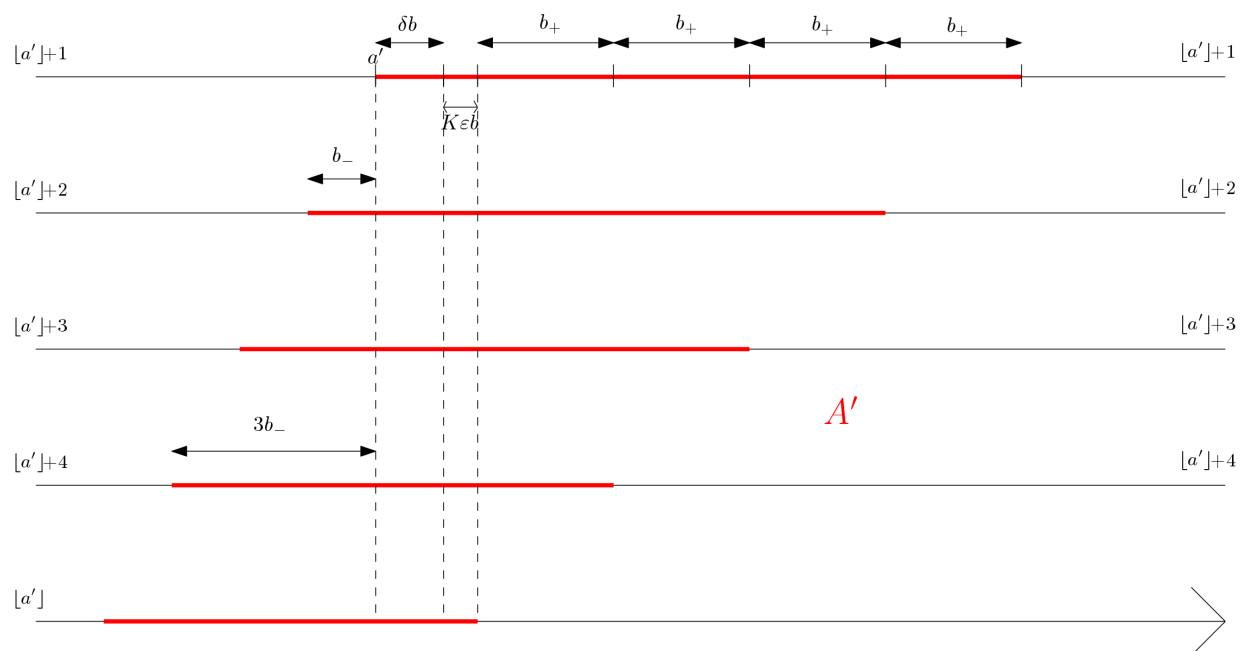


À la fin de la partie 3, nous connaissons où se situe la majorité des éléments de A . Nous savons (cf. (3.4.1)) qu'il existe un réel a' tel que

$$\lambda(A \cap A') \geq \lambda(A) - \left(K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 7) \right) \varepsilon b,$$

où

$$A' = a' + \bigsqcup_{k=0}^{K-1} [k - kb_-, k + \delta b + K\varepsilon b + (K - k - 1)b_+].$$



4.4 Fin de la démonstration des théorèmes 0.0.6 et 0.0.4

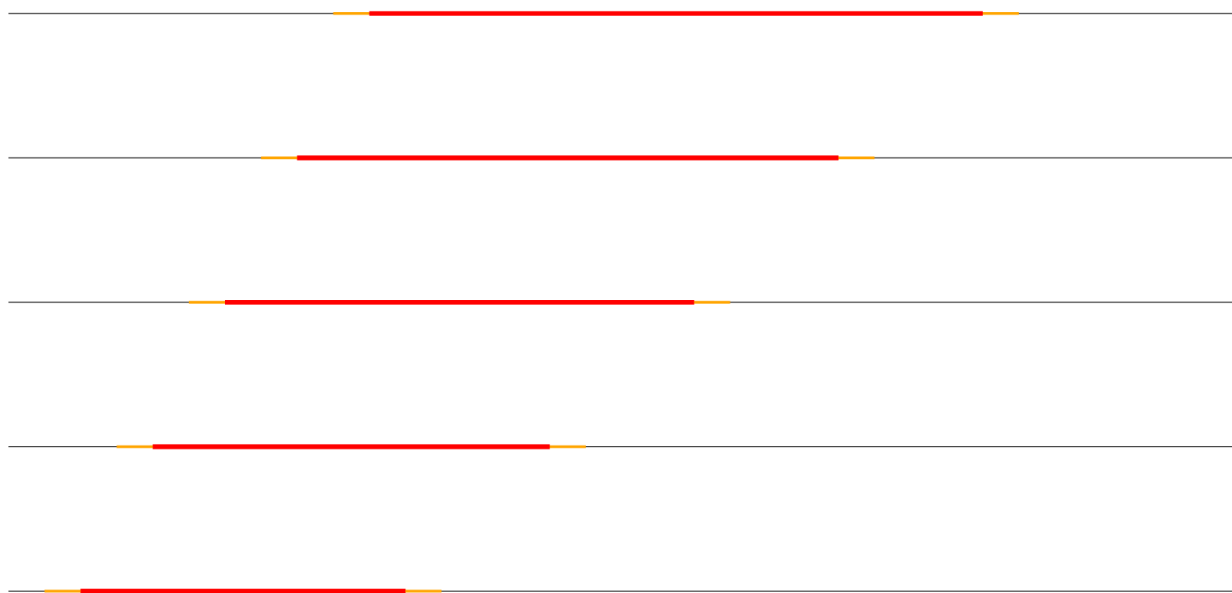
Dans la dernière partie, les lemmes 4.2.5, 4.2.8, 4.3.1 et 4.3.4 affirment qu'aucun élément de A ne peut se trouver à une distance supérieure à $(\tau_K + 1)\varepsilon b$ de A' , où

$$\tau_K = K^2 \log(K) - K(K(1 + \log 4) - \log K - 6 + \log 4) + 7.$$

Ainsi

$$A \subseteq A' + [-(\tau_K + 1)\varepsilon b, (\tau_K + 1)\varepsilon b].$$

$$A' + [-(\tau_K + 1)\varepsilon b, (\tau_K + 1)\varepsilon b]$$



$$\text{avec } \tau_K = (K(K + 1) \log(K) - K(K(1 + \log 4) - 6 + \log 4) + 7$$

On prouve le théorème 0.0.6 en posant

$$\Gamma_K = \tau_K + K/2 + 1,$$

pour plus de lisibilité. Le théorème 0.0.4 est un simple corollaire du théorème 0.0.6.

4.5 Fin de la démonstration du théorème 0.0.7

On rappelle que

$$A' = a' + \bigsqcup_{k=0}^{K-1} [k - kb_-, k + \delta b + K\varepsilon b + (K - k - 1)b_+].$$

Comme $\tau_K \varepsilon b = \left((K(K+1) \log(K) - K(K(1+\log 4) - 6 + \log 4) + 7) \varepsilon b \right)$, les lemmes 4.2.1, 4.2.7 et 4.3.1 nous amènent à l'inclusion suivante

$$A \subseteq A' + [-(\tau_K + 1)\varepsilon b, (\tau_K + 1)\varepsilon b] \cup U' \cup V_1 \cup V_2,$$

où

$$V_1 = [b - 1 - (\tau_K + 1)\varepsilon b, (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b + \delta b - 1],$$

$$V_2 = [\max A' + 1 - (K\tau_K + 2K + 1)\varepsilon b - \delta b, \max A' + (\tau_K + 1)\varepsilon b + 1 - b],$$

et

$$U' = [(K-1)b_+ \delta b, 1 - b_-] \cup [(K-2) + b_+ + \delta b, (K-1) - (K-1)b_-].$$

De plus, le lemme 4.2.9 et la remarque 4.2.10 nous assurent que V_1 et V_2 ne peuvent pas tous deux intersecter A . Ainsi

$$A \subseteq A' + [-(\tau_K + 1)\varepsilon b, (\tau_K + 1)\varepsilon b] \cup U' \cup V,$$

où

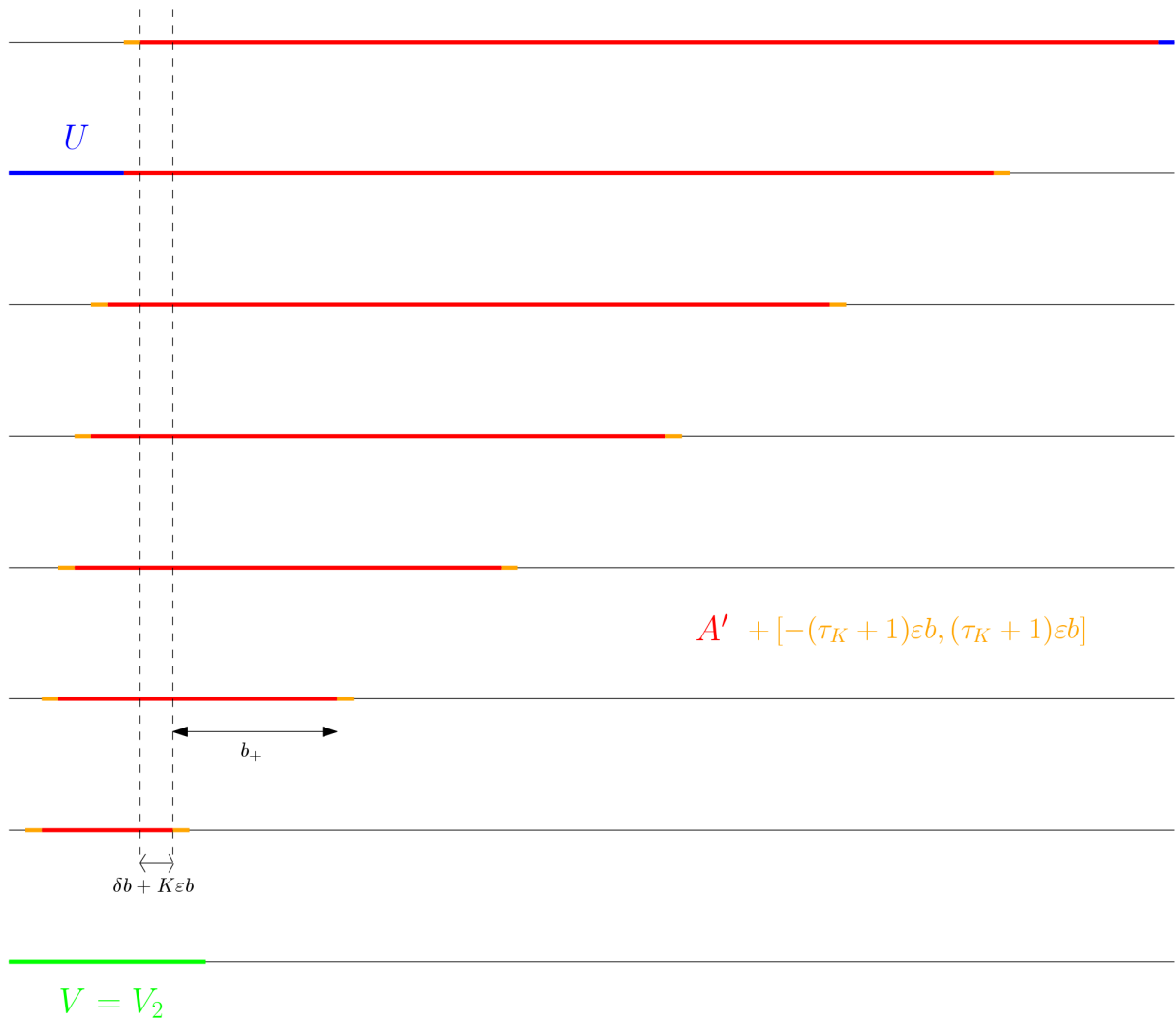
$$V = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \min(\lambda(B_0), \lambda(B_1)) > \tau_K \varepsilon b \\ V_1 & \text{si } \lambda(B_0) < (1 - \tau_K \varepsilon)b \\ V_2 & \text{si } \lambda(B_1) < (1 - \tau_K \varepsilon)b \end{cases}.$$

Enfin la remarque 4.3.5 nous permet d'écartier l'un ou l'autre des deux intervalles composant U' et finalement

$$A \subseteq A' + [-(\tau_K + 1)\varepsilon b, (\tau_K + 1)\varepsilon b] \cup U \cup V,$$

où

$$U = \begin{cases} [(K-1)b_+ \delta b, 1 - b_-] & \text{si } b_+ > b_- \\ [(K-2) + b_+ + \delta, (K-1) - (K-1)b_-] & \text{si } b_+ < b_- \\ \emptyset & \text{si } b_+ = b_- \end{cases}.$$



Encore un fois, nous obtenons le théorème 0.0.7 en posant $\Gamma_K = \tau_K + K/2 + 1$ et en notant que $\max A' = \max A'_0 + K\epsilon b$.

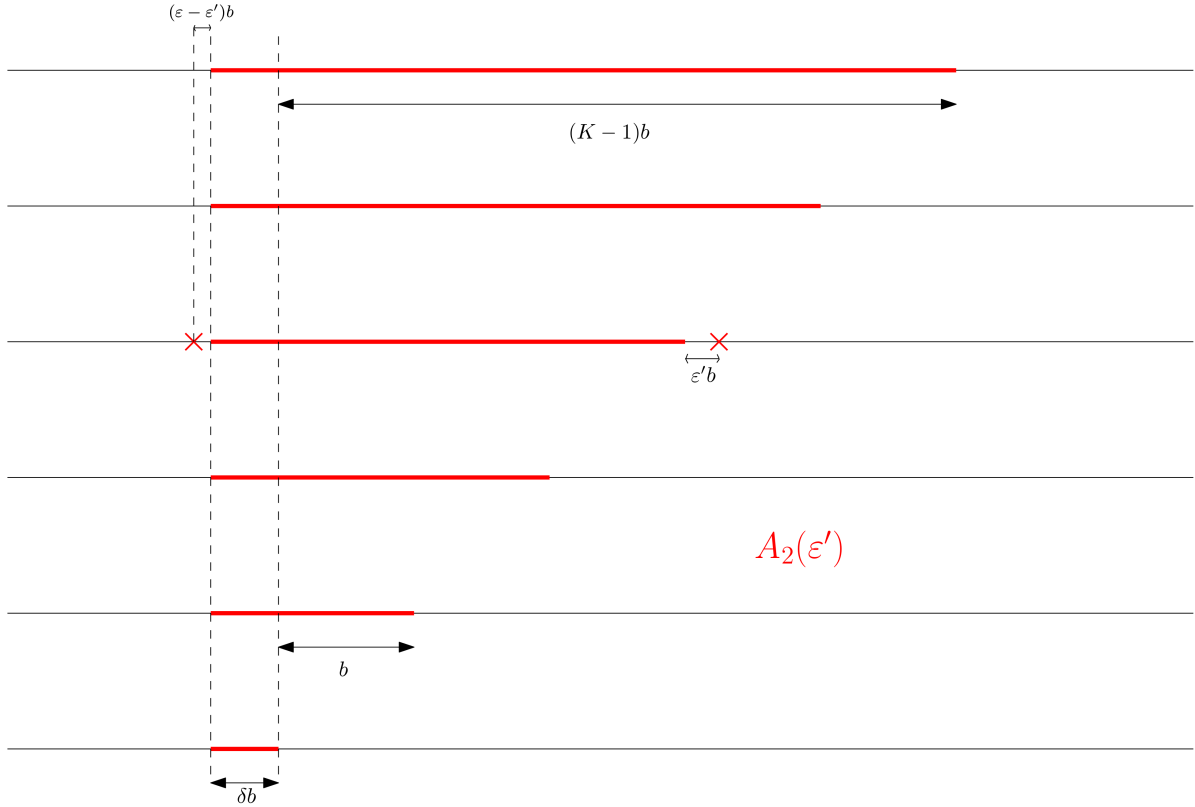
Nous pensons que nos théorèmes ne sont pas optimaux et conjecturons en particulier que sous les hypothèses du théorème 0.0.4, il est possible de montrer que A est inclus dans un translaté de $A_0 + [-\varepsilon b/2, \varepsilon b/2]$. De notre côté, nous prouvons seulement que A est inclus dans un translaté de $A_0 + [-\Gamma_K \varepsilon b, \Gamma_K \varepsilon b]$ et une première étape d'amélioration serait de parvenir à démontrer que A est inclus dans un translaté de $A_0 + [-\Gamma \varepsilon b, \Gamma \varepsilon b]$, où Γ est une constante ne dépendant plus de K .

D'autre part, il est impossible d'établir, en toute généralité, une inclusion plus précise que $A \subseteq a + A_0 + [-\varepsilon b, \varepsilon b]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. En effet, posons $B = [0, b_+] \cup \{1\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, K\}$ et tout $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$,

$$A_i(\varepsilon') = A_0 \cup \left((i-1) + (K-i)b + \delta b + [0, \varepsilon' b] \right) \cup \left((i-1) + [-(\varepsilon - \varepsilon')b, 0] \right),$$

où on rappelle que

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^K [k-1, k-1 + (K-k)b + \delta b].$$



Chaque couple d'ensembles $A_i(\varepsilon')$ et B respectent les conditions du théorème 0.0.4. De plus $A_0 + [-\varepsilon b/2, \varepsilon b/2]$ (ou $A_0 + [0, \varepsilon b]$ en translatant par $\varepsilon/2$) est le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) à translation près, contenant une translation de chaque $A_i(\varepsilon')$. Ceci prouve que si nous arrivons à démontrer notre conjecture, alors le résultat serait optimal en un certain sens.

Dans le cas symétrique $A = B$, il est possible d'être encore un peu plus précis et Candela et de Roton ([4] théorème 4.1) ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 4.5.1 (Candela et de Roton). *Soit $0 < \varepsilon < 1/3$ tel que $\varepsilon < 10^{-4}$. Soit $A \subset [0, 1]$ un ensemble fermé, de diamètre 1, de mesure non nulle et tel que $\lambda(A + A) \leq$*

$(3 + \varepsilon)\lambda(A)$ et $\lambda(A) < \frac{1}{2(1+\varepsilon)}$. Alors $A \bmod 1$ est inclus dans un intervalle $I \subset \mathbb{T}$ tel que $\mu(I) \leq (1 + \varepsilon)\lambda(A)$.

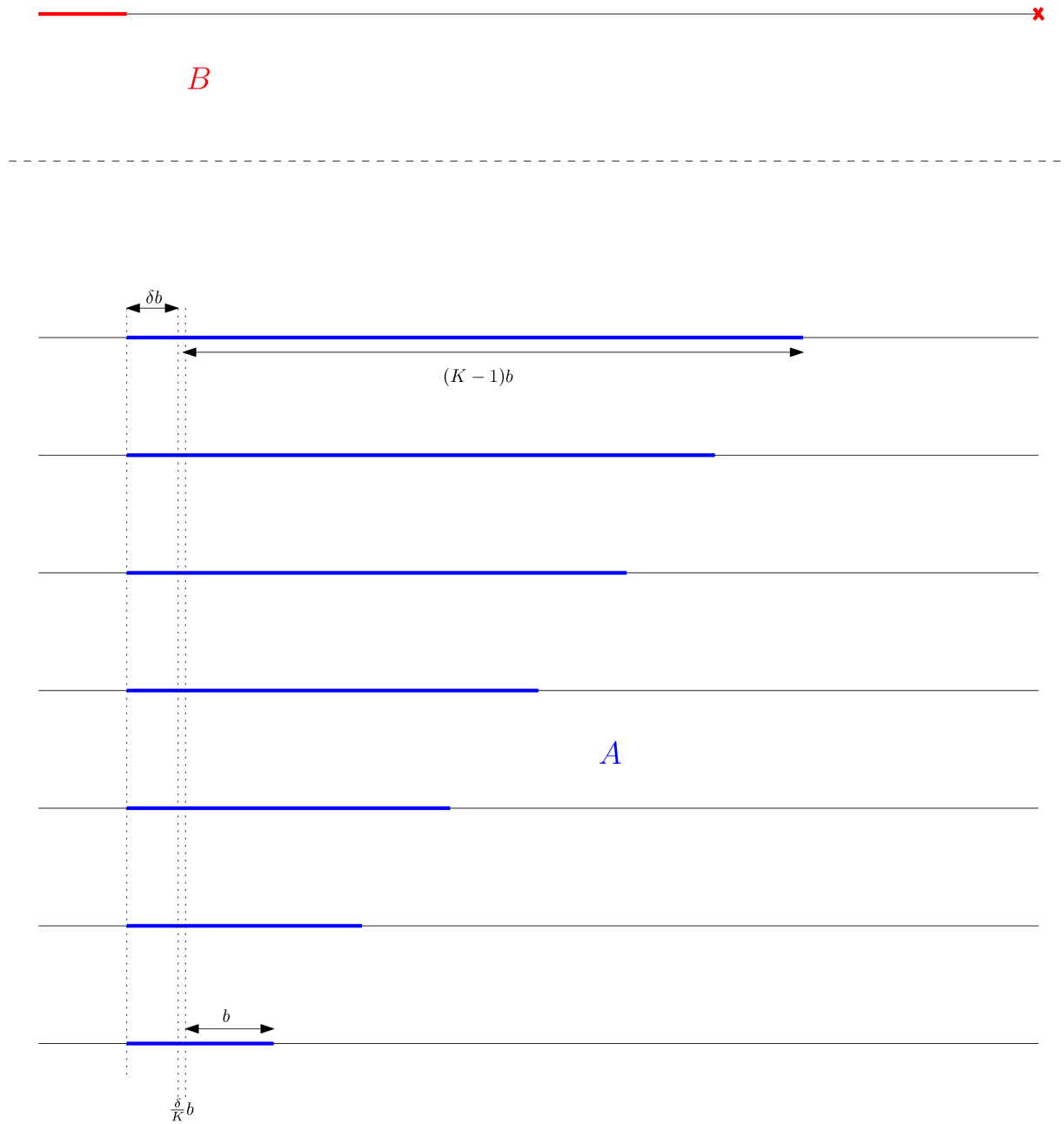
Dans ce théorème, la condition $\varepsilon < 10^{-4}$ est nécessaire afin d'utiliser un autre résultat de Candela et de Roton ([4] théorème 1.6) mais toute amélioration de ce dernier affaiblira automatiquement l'hypothèse.

Au sujet de nos résultats, nous pensons également qu'il est possible d'améliorer les hypothèses de contrainte sur ε mais lever certaines restrictions occasionnerait quelques difficultés pour notre approche. Par exemple si $\varepsilon > \delta/K$, alors il est possible que K ne soit plus égal à K_A (ce qui était confortable dans notre démonstration). En effet, si nous posons

$$B = [0, b] \cup \{1\},$$

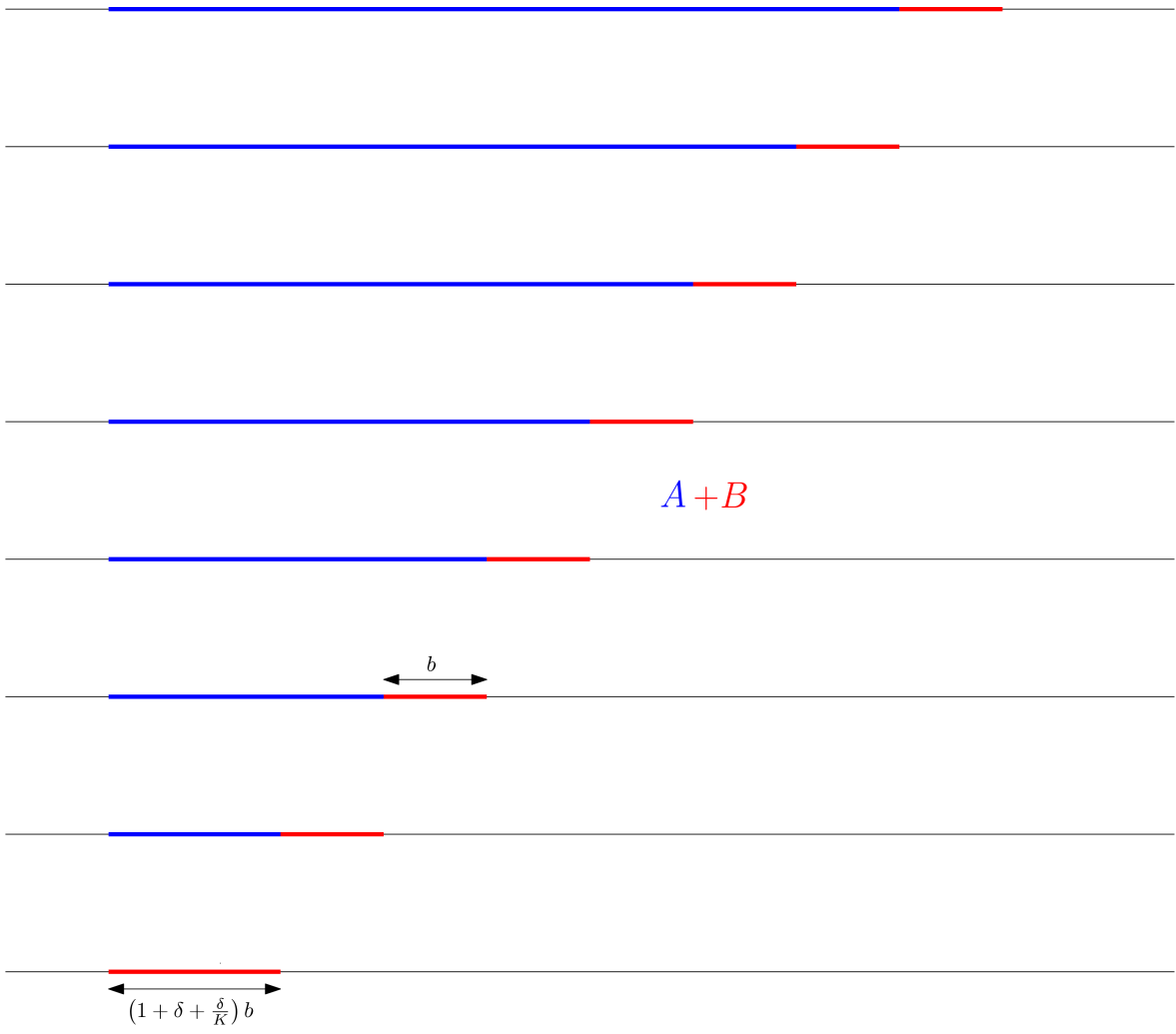
et

$$A = \bigcup_{k=1}^{K-1} [k-1, k-1 + (\delta + (K-k) + \delta/K)b],$$



alors $K_A = K - 1$ et on a bien

$$\lambda(A + B) = \lambda(A) + (K + \delta + \delta/K) b \leq \lambda(A) + (K + \delta + \varepsilon) b.$$



Partie II

Ensembles de Sidon

Comme rappelé dans l'introduction, les ensembles de Sidon ont été introduits en 1932 par le mathématicien Simon Sidon [30]. Ils représentent aujourd'hui une branche importante de la combinatoire additive et bon nombre d'axes de recherche restent encore à explorer à propos de ces ensembles. Dans ce chapitre, nous évoquerons quelques avancées que nous avons pu obtenir dans certains de ces axes.

Soit E un semi-groupe additif, on dit qu'un ensemble dans E est de Sidon si il n'admet que les solutions triviales à l'équation $a + b = c + d$, c'est à dire les solutions telles que $a = c$ ou $a = d$. Cette définition se reformule comme suit. $S \subseteq E$ est un ensemble de Sidon si il admet au plus une solution à l'équation $a + b = e$ pour tout $e \in E$. Cette nouvelle définition est plus pratique pour définir la généralisation suivante. On dit qu'un ensemble est un ensemble $B_2[g]$ si il admet au plus g solutions $\{a, b\}$ à l'équation $a + b = e$ pour tout $e \in E$.

Définition 0.0.1. *Soit E un semi-groupe abélien et $g \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$B_2[g](E) = \left\{ A \subseteq E \mid \#\{ \{a, b\} \subseteq A \mid a + b = e \} \leq g \text{ pour tout } e \in E \right\}.$$

L'indice 2 est relatif au nombre de termes dans la somme. On remarque qu'en particulier $B_2[1](E)$ est l'ensemble des ensembles de Sidon dans E .

C'est en travaillant sur la théorie des séries de Fourier que S. Sidon [30] introduit ces ensembles. Il se demande notamment quel cardinal peut atteindre un ensemble de Sidon dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Cette question s'est avérée difficile et beaucoup de chercheurs se sont penchés sur elle. Deux directions sont alors envisagées. La majoration et la minoration de ce cardinal maximal. Pour la majoration, on prouve qu'au delà d'un certain cardinal, un sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ne peut pas être un ensemble de Sidon. Pour la minoration, on construit simplement un gros ensemble de Sidon. Ainsi le cardinal maximal est nécessairement supérieur à celui de notre ensemble explicitement construit. On note $F(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ce cardinal maximal. Plus généralement, on introduit la notation suivante.

Définition 0.0.2. *Soit E un semi-groupe abélien et A un sous ensemble fini de E . On note*

$$F(A) = \max \{ \#S \mid S \subseteq A, S \text{ est de Sidon} \}.$$

Le problème de Sidon était donc de borner $F(\llbracket 1, n \rrbracket)$ de la manière la plus efficace possible. Sidon a commencé par prouver la minoration $F(\llbracket 1, n \rrbracket) \gg n^{1/4}$. En 1941, Erdős et Turán [11] démontrent la majoration

$$F(\llbracket 1, n \rrbracket) < \sqrt{n} + O(n^{1/4}),$$

en utilisant la méthode dite des petites différences, méthode que nous adapterons afin de prouver les théorèmes 1.1.1 et 1.1.5. Quelques années plus tard, et indépendamment, Chowla [5] et Erdős [11] déduisent tous deux d'un résultat de Singer [31] la minoration

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(\llbracket 1, n \rrbracket)}{\sqrt{n}} \geq 1.$$

Ces deux derniers résultats suffisent à montrer la fameuse équivalence

$$F(\llbracket 1, n \rrbracket) \sim \sqrt{n} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Aujourd'hui encore nous ne connaissons pas beaucoup mieux que ce résultat. La meilleure majoration actuelle¹ est due à Lindström [23] qui améliore le résultat d'Erdős-Turán par un argument élémentaire et obtient

$$F(\llbracket 1, n \rrbracket) < \sqrt{n} + n^{1/4} + 1. \quad (0.0.1)$$

En ce qui concerne la minoration, d'autres constructions ont vu le jour depuis, comme celle de Ruzsa [28] ou celle de Bose [2] mais aucune n'a significativement amélioré le résultat. Si bien qu'aujourd'hui encore nous ne savons toujours pas si la différence $F(\llbracket 1, n \rrbracket) - \sqrt{n}$ est non majorée, ni même si elle est positive. Deux propriétés conjecturées depuis des années (cf. [14]) mais toujours non démontrées et sur lesquelles nous reviendrons dans la deuxième partie de ce chapitre.

Le premier chapitre de cette partie sera consacré à l'étude de $F(A)$ quand A est un ensemble d'entiers naturels. En effet, on ne connaît pas grand chose quand A n'est pas un intervalle. Nous évoquerons donc quelques résultats à ce sujet et établirons des majorations pour quelques structures dégénérées de l'intervalle comme une union d'intervalles ou certaines progressions arithmétiques généralisées.

Dans la deuxième partie, nous parlerons d'une avancée de Cilleruelo [6] sur la minoration de $F(\llbracket 1, n \rrbracket^2)$ et de nos tentatives pour les dimensions supérieures. Bien que celles-ci n'aboutissent pas à une nouvelle borne, nous aurons tout de même l'occasion d'établir un résultat sur la construction de $B_2[g]$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket^d$ où $d \geq 2$.

Enfin, dans la troisième partie, nous reviendrons dans les entiers pour parler des ensembles infinis de Sidon ayant une grande densité dans les entiers.

¹J. Balogh, Z. Füredi et S. Roy ont récemment prouvé que pour n assez grand on a $F(\llbracket 1, n \rrbracket) < \sqrt{n} + 0,998n^{1/4}$ (prépublication, cf. arXiv:2103.15850).

Chapitre 1

Ensembles de Sidon dans des dégénérescences de l'intervalle

Pour tout $A \subset \mathbb{N}^*$ on rappelle qu'on note

$$F(A) = \max \{ \#S / S \subseteq A, S \text{ est de Sidon} \},$$

et qu'il est bien connu que

$$F(\llbracket 1, n \rrbracket) \sim \sqrt{n}. \quad (1.0.1)$$

De plus, l'équation $a + b = c + d$ est stable par translation et homothétie donc il est clair que

$$F(P) \sim \sqrt{n},$$

si P est une progression arithmétique quelconque de cardinal n . Mais qu'en est-il des structures autres que l'intervalle ou la progression arithmétique ? Que peut-on dire sur $F(A)$ en toute généralité ? Quand A est une union de deux intervalles ? Une union finie d'intervalles ? Une progression arithmétique généralisée ?

H.L. Abbott [1] a travaillé sur la minoration et a établi le résultat suivant.

Théorème 1.0.1 (Abbott). *Si pour tout entier $n \geq 1$, on pose*

$$g(n) = \min \{ F(A) \mid A \text{ est un ensemble d'entiers de cardinal } n \},$$

alors pour n assez grand on a $g(n) > 0,0805\sqrt{n}$.

Ce qui signifie que n'importe quel ensemble d'entiers de cardinal n contient un ensemble de Sidon de cardinal au moins $0,0805\sqrt{n}$ et donc

$$F(A) > 0,0805\sqrt{\#A}.$$

Grâce aux travaux de Lindström [23] et notamment à sa majoration (0.0.1), on a donc

$$0,0805\sqrt{n} < g(n) < \sqrt{n} + n^{1/4} + 1.$$

Peut-on avoir une meilleure majoration en choisissant une autre structure que l'intervalle ? On pense en fait que non et que l'intervalle est le "pire" choix d'ensemble ambiant pour "accueillir" des ensembles de Sidon. Les majorations de $F(A)$ pour A qui est autre

chose qu'un intervalle risquent donc d'être moins bonnes que $\sqrt{n} + n^{1/4} + 1$ mais que peut-on en dire ? Peut-on établir une majoration précise de $F(A)$ quand A est une union finie d'intervalles ? Quand A est une progression arithmétique généralisée ? Nous allons établir certaines de ces majorations dans la section 1.1 de cette partie.

Dans la section 1.2, nous démontrerons une généralisation du théorème d'Abbott (théorème 1.0.1) aux ensembles $B_2[g]$.

Enfin dans la section 1.3, nous parlerons de la minoration du plus gros ensemble de Sidon contenu dans certains autres ensembles que l'intervalle.

1.1 Majoration du cardinal de l'ensemble de Sidon de taille maximale dans certaines dégénérescences de l'intervalle

Quel est le cardinal maximal d'un ensemble de Sidon contenu dans l'union de deux intervalles de cardinal $n/2$? Dans chacun de ces deux intervalles, on ne peut choisir qu'au plus $\sqrt{n/2} + (n/2)^{1/4} + 1$ éléments car sinon cela contredit (1.0.1). Une borne asymptotique triviale serait donc $2\sqrt{n/2} = \sqrt{2}\sqrt{n}$ mais peut-on donner une meilleure majoration ? Nous allons voir qu'on arrive à descendre jusqu'à \sqrt{n} en reprenant l'idée des petites différences de Erdős et Turán (voir [14] p.86). En fait, nous allons directement prouver le résultat pour une union finie d'intervalles et même pour un nombre d'intervalles négligeable devant \sqrt{n} . C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.1.1 (théorème D). *Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$, le cardinal de tout ensemble de Sidon inclus dans une union E de k intervalles disjoints de cardinal n ($\#E = n$) est majoré par*

$$i) \left(\alpha + \sqrt{2 + \alpha^2} \right) \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \text{ si } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = \alpha \neq 0$$

$$ii) \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \text{ si } k = o(\sqrt{n})$$

$$iii) \sqrt{n} + \sqrt{k}n^{1/4} + o(n^{1/4}) \text{ si } k = o(n^{1/4}).$$

Preuve. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$. On pose

$$E = \bigsqcup_{i=1}^k \llbracket n_i^-, n_i^+ - 1 \rrbracket,$$

où $n_1^- < n_1^+ < n_2^- < n_2^+ < \dots < n_k^- < n_k^+$ et $\sum_{i=1}^k (n_i^+ - n_i^-) = n$. Soit $S \subseteq E$ un ensemble de Sidon, u un entier tel que $u < n$ et \mathcal{M} l'ensemble d'indices suivant

$$\mathcal{M} = E + \llbracket 1, u \rrbracket = \left(\bigsqcup_{i=1}^k \llbracket n_i^-, n_i^+ - 1 \rrbracket \right) + \llbracket 1, u \rrbracket,$$

puis pour $m \in \mathcal{M}$, considérons les intervalles I_m définis par

$$I_m = \llbracket m - u, m - 1 \rrbracket.$$

On a $\#\mathcal{M} \leq \sum_{i=1}^k (u + n_i^+ - n_i^-) = n + ku$. Posons $r = \#S$. Comme chaque élément de S est contenu dans u intervalles de type I_m , on a

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} \#(I_m \cap S) = ru. \quad (1.1.1)$$

Ainsi par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} (ru)^2 &\leq \left(\sum_{m \in \mathcal{M}} 1 \right) \left(\sum_{m \in \mathcal{M}} \#(I_m \cap S)^2 \right) \\ &\leq (n + ku) \left(\sum_{m \in \mathcal{M}} \#(I_m \cap S)^2 \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} \#(I_m \cap S)^2 \geq \frac{(ru)^2}{n + ku}. \quad (1.1.2)$$

Soit

$$T_u(m) = \#\{(s_1, s_2) \mid s_1, s_2 \in (S \cap I_m), s_1 < s_2\},$$

et

$$T_u = \sum_{m \in \mathcal{M}} T_u(m).$$

Par (1.1.1) et (1.1.2), on a d'une part

$$\begin{aligned} T_u &= \sum_{m \in \mathcal{M}} T_u(m) = \sum_{m \in \mathcal{M}} \binom{\#(I_m \cap S)}{2} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{(ru)^2}{n + ku} - ru \right), \end{aligned}$$

d'où

$$T_u \geq \frac{ru}{2} \left(\frac{ru}{n + ku} - 1 \right). \quad (1.1.3)$$

D'autre part, pour chaque couple (s_1, s_2) compté dans T_u , $s_2 - s_1$ est un entier d satisfaisant $0 < d < u$. De plus comme S est de Sidon, pour chaque d , il ne peut y avoir qu'au plus un couple (s_1, s_2) correspondant. Enfin, un couple (s_1, s_2) correspondant à un certain d apparaît dans exactement $u - d$ intervalles I_m . Ainsi

$$T_u \leq \sum_{d=1}^{u-1} (u - d) = \frac{u(u-1)}{2}.$$

En utilisant (1.1.3), on obtient

$$\frac{ru}{2} \left(\frac{ru}{n + ku} - 1 \right) \leq \frac{u(u-1)}{2},$$

d'où

$$r^2u - (n + ku)r \leq (u-1)(n + ku),$$

et finalement

$$r \leq \sqrt{\frac{u-1}{u}(n+ku) + \frac{(n+ku)^2}{4u^2}} + \frac{n+ku}{2u}. \quad (1.1.4)$$

Il suffit alors de choisir différentes valeurs pour u suivant la taille relative de k par rapport à n afin de conclure.

- Si $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = \alpha \neq 0$, on choisit alors $u = \lceil \sqrt{n}/\alpha \rceil$ et (1.1.4) donne

$$\begin{aligned} r &\leq \frac{\alpha\sqrt{n}}{2} + \frac{k}{2} + \sqrt{n + \frac{k\sqrt{n}}{\alpha} + \left(\frac{\alpha\sqrt{n}}{2} + \frac{k}{2}\right)^2} + o(n) \\ &\leq \sqrt{n}(\alpha + \sqrt{2 + \alpha^2}) + o(\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2. Comme on veut que r soit un $O(\sqrt{n})$, dans (1.1.4), d'une part le $k(u-1)$ dans la racine nous oblige à choisir $u = O(\sqrt{n})$, et d'autre part le $\frac{n}{2u}$ en dehors de la racine nous amène à choisir $\sqrt{n} = O(u)$. Ainsi nécessairement, notre choix sera de la forme $u = \gamma\sqrt{n}$. Le choix de $u = \lceil \sqrt{n}/\alpha \rceil$ est le plus simple donnant une bonne borne pour tout α , mais à cette étape, si on connaît précisément α , il est possible de faire un peu mieux.

Par exemple si $\alpha = 1/\sqrt{2}$, alors en choisissant $u = \lceil \beta\sqrt{n} \rceil$ puis en injectant dans (1.1.4), on obtient une fonction à minimiser en β . Il suffit alors de demander à un ordinateur, qui nous informe que pour $\beta = 1,79$, on a

$$r \leq 2,266\sqrt{n},$$

alors qu'avec notre choix général de $u = \lceil \sqrt{n}/\alpha \rceil$, on avait seulement

$$r \leq 2,29\sqrt{n}.$$

De même si $\alpha = 1$, on est amenés à choisir $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui donne

$$r \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\sqrt{n} \leq 2,62\sqrt{n}. \quad (1.1.5)$$

- Si $k = o(\sqrt{n})$, alors on choisit $u = \left\lceil \frac{n^{3/4}}{\sqrt{k}} \right\rceil$ et (1.1.4) donne

$$\begin{aligned} r &\leq \sqrt{k}\frac{n^{1/4}}{2} + \frac{k}{2} + \sqrt{n + \sqrt{k}n^{3/4} + \left(\sqrt{k}\frac{n^{1/4}}{2} + \frac{k}{2}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{k}}{n^{1/4}}} + o(1) + o(\sqrt{n}) \\ &\leq \sqrt{n} + o(\sqrt{n}). \end{aligned}$$

On peut être plus précis sur le second terme si $k = o(n^{1/4})$. C'est l'objet du cas suivant.

- Si $k = o(n^{1/4})$, alors on choisit $u = \left\lceil \frac{n^{3/4}}{\sqrt{k}} \right\rceil$ et (1.1.4) donne

$$\begin{aligned}
r &\leq \sqrt{k} \frac{n^{1/4}}{2} + \frac{k}{2} + \sqrt{n + \sqrt{k} n^{3/4} + \left(\sqrt{k} \frac{n^{1/4}}{2} + \frac{k}{2} \right)^2} \\
&\leq \sqrt{k} \frac{n^{1/4}}{2} + \frac{k}{2} + \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{k}}{n^{1/4}} + \frac{k}{4\sqrt{n}} + \frac{k^{3/2}}{2n^{3/4}} + \frac{k^2}{4n}} \\
&\leq \sqrt{n} + \sqrt{k} n^{1/4} + o(n^{1/4}),
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue grâce à l'hypothèse $k = o(n^{1/4})$ et au développement limité $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ en 0.

□

Ce résultat est intéressant car k peut grandir en fonction de n . Le nombre d'intervalles peut donc augmenter en même temps que n grandit. En utilisant l'énergie additive, Cilleruelo ([6] théorème 2) avait obtenu un résultat lorsque k est fixé et ne varie pas en fonction de n . Nous retrouvons en particulier la borne qu'il avait obtenue avec la troisième inégalité du théorème 1.1.1.

Ce théorème 1.1.1 nous donne la même asymptotique pour les unions de k intervalles où $k = o(\sqrt{n})$ que pour les intervalles. Si A est une telle union, on a

$$F(A) \leq \sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

On remarque que c'est à partir de \sqrt{n} intervalles qu'on est obligés d'augmenter la constante devant l'asymptotique. C'est bien sûr normal que l'asymptotique augmente en fonction du nombre d'intervalles et dépasse \sqrt{n} . Le cas limite étant que A soit lui même un ensemble de Sidon et qu'on réduise les intervalles à des points. De cette manière, on peut voir A comme l'union de $n (= \#A)$ intervalles et évidemment

$$F(A) = n.$$

Le fait que ce soit à partir de \sqrt{n} intervalles qu'on soit obligés d'augmenter la constante 1 devant l'asymptotique \sqrt{n} est lui aussi tout à fait normal. En effet sinon, à partir de \sqrt{n} intervalles, il y aurait "autant" d'intervalles que d'éléments à choisir pour obtenir notre ensemble de Sidon, ce qui n'est vraiment pas contraignant. Par exemple, voici une construction donnant un ensemble de Sidon de cardinal $2n - 1$ dans une union de n intervalles de cardinal n .

Proposition 1.1.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ensemble de Sidon de cardinal $2n$ dans une union de n intervalles de cardinal n chacun.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_1 = \{2^{k+1} \mid k = 1, \dots, n\}$, $S_2 = \{2^{k+1} + k \mid k = 1, \dots, n-1\}$ et $S = S_1 \sqcup S_2$. Comme $\#S = 2n - 1$ et

$$S \subseteq \bigsqcup_{k=1}^n \llbracket 2^{k+1}, 2^{k+1} + n - 1 \rrbracket,$$

il suffit de vérifier que S est un ensemble de Sidon. Soient $a, b, c, d \in S$ tels que $a+b = c+d$ et vérifions donc que $\{a, b\} = \{c, d\}$.

Comme $2^{k+2} - 2^{k+1} > 2k$, $a+b = c+d$ implique qu'il existe k_1 et k_2 dans $\{1, \dots, n\}$ tels que $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ sont inclus dans $\llbracket 2^{k_1+1}, 2^{k_1+1} + n \rrbracket \cup \llbracket 2^{k_2+1}, 2^{k_2+1} + n \rrbracket$. On peut supposer sans perdre de généralité que $a, c \in \llbracket 2^{k_1+1}, 2^{k_1+1} + n \rrbracket$ et $b, d \in \llbracket 2^{k_2+1}, 2^{k_2+1} + n \rrbracket$. De cette manière on a

$$\begin{aligned} a + b = c + d &\Rightarrow a - c = d - b \\ &\Rightarrow a - c \in \{0, k_2\}, \end{aligned}$$

or comme $a, c \in \llbracket 2^{k_1+1}, 2^{k_1+1} + n \rrbracket$, $a - c \in \{0, k_1\}$. Donc soit $a = c$ et donc $\{a, b\} = \{c, d\}$, soit $k_1 = k_2$ et donc $\{a, b\} = \{c, d\}$. \square

Cette proposition prouve donc que la condition $k = o(\sqrt{n})$ du point *ii*) du théorème 1.1.1 est optimale en un certain sens. Pour améliorer ce théorème, il faudrait réussir à diminuer la constante $\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{11}{8} + 2\sqrt{2}\alpha}$ devant le \sqrt{n} de la majoration du point *i*). Cependant la proposition 1.1.3 implique qu'on ne pourra pas descendre en dessous de $\sqrt{2}$ pour $\alpha = 1$. Dans la partie 1.3 nous ferons une construction nous fournissant également une minoration de cette constante pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le théorème 1.1.1 donne immédiatement un résultat intéressant sur certaines progressions arithmétiques généralisées à deux pas. C'est l'objet du corollaire suivant.

Corollaire 1.1.4. *Soit S un ensemble de Sidon contenu dans une progression arithmétique généralisée E à 2 pas a et b tels que a divise b .*

$$E = \{ak_1 + bk_2 \mid k_1 \in \{1, \dots, n_1\}, k_2 \in \{1, \dots, n_2\}\}.$$

Alors on a

$$\#S \leq \sqrt{\#E} + o(\sqrt{\#E}) \quad (n_1 \rightarrow +\infty \text{ et } n_2 = o(n_1)).$$

Preuve. Soit $S \subset E$ un ensemble de Sidon. Comme a divise b , a divise tous les éléments de E et donc S' défini par

$$S' = \{s/a \mid s \in S\},$$

est un ensemble inclus dans

$$E' = \bigsqcup_{i=1}^{n_2} \left[\left[\frac{ib}{a} + 1, \frac{ib}{a} + 1 + n_1 \right] \right].$$

De plus, S' est un ensemble de Sidon car si $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S'$ sont tels que $s_1 + s_2 = s_3 + s_4$ alors $a(s_1 + s_2) = a(s_3 + s_4)$ et $as_1, as_2, as_3, as_4 \in S$ qui est de Sidon, c'est donc impossible. Comme $n_2 = o(n_1)$ par hypothèse, le nombre d'intervalles n_2 dans E' est un petit o de $\sqrt{\#E'} = \sqrt{n_1 n_2}$. Nous sommes donc dans les conditions de la deuxième inégalité du théorème 1.1.1 et ainsi

$$\#S' \leq \sqrt{n_1 n_2} + o(\sqrt{n_1 n_2}).$$

Or finalement, $\#S = \#S'$ et $\#E = n_1 n_2$, ce qui prouve le corollaire. \square

Ce corollaire donne donc également l'asymptotique \sqrt{n} pour les progression arithmétiques généralisées à deux pas tels que celui de la plus grande des deux longueurs divise celui de la plus petite.

Qu'en est-il d'une progression arithmétique généralisée quelconque ? Quand la longueur d'un des pas est suffisamment grande, nous avons également un résultat.

Théorème 1.1.5 (théorème E). *Soit E une progression arithmétique généralisée*

$$E = \{a_1 i_1 + \dots + a_k i_k \mid i_1 \in \{1, \dots, n_1\}, \dots, i_k \in \{1, \dots, n_k\}\}.$$

Alors si S est un ensemble de Sidon dans E , nécessairement

$$\#S \leq a_1 \sqrt{\#E} + o(\sqrt{\#E}) \quad (n_1 \rightarrow +\infty \text{ et } n_2 n_3 \dots n_k = o(n_1)).$$

Preuve. Soit donc E une telle progression arithmétique généralisée,

$$E = \{a_1 i_1 + \dots + a_k i_k \mid i_1 \in \{1, \dots, n_1\}, \dots, i_k \in \{1, \dots, n_k\}\},$$

S un ensemble de Sidon inclus dans E , $n = n_1 \dots n_k$, $u = \lfloor \sqrt{n_1} n^{1/4} \rfloor$ et \mathcal{M} l'ensemble d'indices suivant :

$$\mathcal{M} = \{i_1 a_1 + i_2 a_2 + \dots + i_k a_k \mid i_1 \in \{1, \dots, n_1 + u\}, i_2 \in \{1, \dots, n_2\}, \dots, i_k \in \{1, \dots, n_k\}\}.$$

Pour $m \in \mathcal{M}$, considérons les intervalles I_m définis par

$$I_m = \llbracket m - u, m - 1 \rrbracket.$$

On a $\#\mathcal{M} \leq n_2 \dots n_k (n_1 + u) = n + n_2 \dots n_k u$. Posons $r = \#S$. Notons que l'hypothèse $n_2 n_3 \dots n_k = o(n_1)$ entraîne $\sqrt{n} = o(n_1)$. Ainsi chaque élément de S est contenu dans au moins $\lfloor u/a_1 \rfloor$ intervalles I_m , donc $\lfloor u/a_1 \rfloor < n_1$ par définition de u . Et ainsi comme chaque élément de S est contenu dans au moins $\lfloor u/a_1 \rfloor$ intervalles et au plus u intervalles, on a

$$r \lfloor u/a_1 \rfloor \leq \sum_{m \in \mathcal{M}} \#(I_m \cap S) \leq r u. \quad (1.1.6)$$

D'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} (r \lfloor u/a_1 \rfloor)^2 &\leq \left(\sum_{m \in \mathcal{M}} 1 \right) \left(\sum_{m \in \mathcal{M}} \#(I_m \cap S)^2 \right) \\ &\leq (n + n_2 \dots n_k u) \left(\sum_{m \in \mathcal{M}} \#(I_m \cap S)^2 \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} \#(I_m \cap S)^2 \geq \frac{(r \lfloor u/a_1 \rfloor)^2}{n + n_2 \dots n_k u}. \quad (1.1.7)$$

Soit

$$T_u(m) = \#\{(s_1, s_2) \mid s_1, s_2 \in (S \cap I_m), s_1 < s_2\},$$

et

$$T_u = \sum_{m \in \mathcal{M}} T_u(m).$$

Par (1.1.6) et (1.1.7), on a d'une part

$$\begin{aligned} T_u &= \sum_{m \in \mathcal{M}} T_u(m) \\ &= \sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{\#(I_m \cap S)(\#(I_m \cap S) - 1)}{2} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{(r \lfloor u/a_1 \rfloor)^2}{n + n_2 \dots n_k u} - ru \right), \end{aligned}$$

d'où

$$T_u \geq \frac{1}{2} \frac{(r \lfloor u/a_1 \rfloor)^2}{n + n_2 \dots n_k u} - \frac{ru}{2}. \quad (1.1.8)$$

D'autre part, pour chaque couple (s_1, s_2) compté dans T_u , $s_2 - s_1$ est un entier d satisfaisant $1 \leq d < u$. De plus comme S est de Sidon, pour chaque d , il ne peut y avoir qu'au plus un couple (s_1, s_2) correspondant. Enfin, un couple (s_1, s_2) correspondant à un certain d apparaît dans au plus $(u - d)$ intervalles I_m . Ainsi

$$T_u \leq \sum_{d=1}^{u-1} (u - d) = \frac{u(u-1)}{2}.$$

En utilisant (1.1.8), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{(r \lfloor u/a_1 \rfloor)^2}{n + n_2 \dots n_k u} - \frac{ru}{2} \leq \frac{u(u-1)}{2},$$

d'où

$$(r \lfloor u/a_1 \rfloor)^2 - ru(n + n_2 \dots n_k u) \leq u(u-1)(n + n_2 \dots n_k u),$$

donc

$$r^2 \left(\frac{u}{a_1^2} - \frac{2}{a_1} + \frac{1}{u} \right) - r(n + n_2 \dots n_k u) \leq (u-1)(n + n_2 \dots n_k u),$$

ce qui entraîne

$$r \leq \sqrt{a_1^2(n + n_2 \dots n_k u) + \frac{(n + n_2 \dots n_k u)^2}{4u^2} a_1^4} + \frac{n + n_2 \dots n_k u}{2u} a_1^2 + o(\sqrt{n}),$$

et finalement, comme par hypothèse $\sqrt{n} = o(n_1)$ et comme on a posé $u = \lfloor \sqrt{n_1} n^{1/4} \rfloor$,

$$r \leq a_1 \sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

□

Les théorèmes 1.1.1, 1.1.5 et le corollaire 1.1.4 fournissent donc des majorations du cardinal d'un ensemble de Sidon dans des structures dégénérées de l'intervalle. De son côté, Abbott [1] démontre que n'importe quel ensemble d'entiers de cardinal n contient un ensemble de Sidon de cardinal supérieur à $0,0805\sqrt{n}$. Dans la section suivante, nous allons établir une généralisation de ce résultat aux ensembles $B_2[g]$.

1.2 Généralisation du théorème d'Abbott aux $B_2[g]$

Soit A un ensemble d'un semi-groupe additif E . Dans cette partie, nous nous intéressons au cardinal du plus gros ensemble $B_2[g]$ contenu dans A , ce qui nous amène aux deux définitions suivantes.

Définition 1.2.1. *Soit E un semi-groupe abélien et A un sous-ensemble fini de E . Pour tout $g \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$F(A)[g] = \max \{ \#B \mid B \in B_2[g](A) \}.$$

Remarque 1.2.2. *En particulier $F(A)[1] = F(A)$.*

Définition 1.2.3. *Soit $g \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit*

$$\kappa_g(n) = \min \{ F(A)[g] \mid A \subset \mathbb{N}, \#A = n \}.$$

Abbott [1] s'est intéressé au cas $g = 1$ et a obtenu le résultat suivant.

Théorème 1.2.4 (Abbott). *On a*

$$\kappa_1(n) \geq 0,0805\sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

Comme $B_2[g](A) \subset B_2[g'](A)$ si $g < g'$, on a

$$\kappa_g(n) \geq \kappa_1(n),$$

quel que soit $g \geq 2$. Ainsi, grâce à la borne établie par Abbott, on a la proposition suivante.

Proposition 1.2.5. *Soit $g \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\kappa_g(n) \geq 0,0805\sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

Le reste de cette partie consiste à prouver le résultat suivant.

Théorème 1.2.6 (théorème H). *Soit $g \geq 2$ un entier, on a*

$$\kappa_g(n) \geq 0,0402\lambda_g\sqrt{n} + o(\sqrt{n}),$$

où $\lambda_2 = 1,5119$ et $\lambda_g = \frac{g + \lfloor g/2 \rfloor}{\sqrt{g + 2 \lfloor g/2 \rfloor}}$ si $g \geq 3$.

Avec les minoration de $F(n)[g]$ connues actuellement, pour $g \leq 5$, ce théorème 1.2.6 fournit une moins bonne borne que la proposition 1.2.5. En revanche pour $g \geq 6$, c'est le théorème 1.2.6 qui fournit la meilleure borne avec notamment

$$\kappa_6(n) \geq 0,1\sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

La preuve de ce théorème 1.2.6 est conséquent et le reste de cette partie lui est dédiée.

Preuve du théorème 1.2.6.

Soit $g \geq 2$ un entier, n un entier et A un ensemble quelconque d'entiers de cardinal n . Écrivons $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ et $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$. L'idée est de partir de cet ensemble quelconque et de montrer l'existence d'un autre ensemble B tel que $F(B)[g] \leq F(A)[g]$, $\max B < a_n$, et $\#B$ le plus grand possible. Pour établir cette existence nous utiliserons différentes techniques au cours de cette preuve mais toutes basées sur la division euclidienne. En effet, nous verrons que les restes de certaines divisions euclidiennes forment un candidat parfait pour un tel ensemble B . Ainsi en répétant ces différentes opérations les unes après les autres, nous finirons par obtenir un ensemble final E tel que $F(E)[g] \leq F(A)[g]$ et tel que $\max E < n$. Il ne nous restera alors plus qu'à nous appuyer sur un raisonnement combinatoire pour conclure. La principale difficulté va être de ne pas "perdre" trop d'éléments à chaque "opération" (ici "opération" désigne le passage de A à B). En effet, pour effectuer certaines divisions euclidiennes, nous allons devoir éliminer une partie des éléments. Il faudra donc veiller à ce que cette partie ne soit pas trop grosse, afin que $\#E$ ne soit pas trop petit pour nous permettre de conclure.

Nous allons commencer par nous appuyer sur le résultat suivant.

Lemme 1.2.7. *Soit n un entier et $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de cardinal n . S'il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$ tous distincts tels que $a_i = h_i q + r_i$ et $|r_i| < q/4$ quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$ alors*

$$F\left(\{a_i\}_{i=1}^n\right)[g] \geq F\left(\left\{r_i + \frac{q}{4}\right\}_{i=1}^n\right)[g].$$

Preuve. Soient n un entier, $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de cardinal n , $q \in \mathbb{N}$ et $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$ tous distincts tels que $a_i = h_i q + r_i$ et $|r_i| < q/4$ quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Soit de plus $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ tel que $\{r_i\}_{i \in I} \in B_2[g]\left(\{r_i\}_{i=1}^n\right)$. Comme $|r_i| < q/4$ quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$, $r_{i_1} + r_{i_2} \neq r_{i_3} + r_{i_4}$ implique $a_{i_1} + a_{i_2} \neq a_{i_3} + a_{i_4}$ pour tout $i_1, i_2, i_3, i_4 \in I$. Par suite, pour un entier k , si on avait strictement plus de g solutions $(a, b) \in \{a_i\}_{i \in I}^2$ à l'équation $x + y = k$, alors puisqu'il y a bijection entre $\{a_i\}_{i \in I}$ et $\{r_i\}_{i \in I}$, et comme $a_{i_1} + a_{i_2} = a_{i_3} + a_{i_4}$ implique $r_{i_1} + r_{i_2} = r_{i_3} + r_{i_4}$, il existerait un entier k' tel qu'il y ait strictement plus de g solutions $(r, s) \in \{r_i\}_{i \in I}^2$ à l'équation $x + y = k'$, ce qui est absurde. Cela qui signifie $\{a_i\}_{i \in I} \in B_2[g]\left(\{a_i\}_{i=1}^n\right)$ et donc n'importe quel $B_2[g]$ dans $\{r_i\}_{i=1}^n$ fournit automatiquement un $B_2[g]$ dans $\{a_i\}_{i=1}^n$, d'où finalement

$$F\left(\{a_i\}_{i=1}^n\right)[g] \geq F\left(\{r_i\}_{i=1}^n\right)[g].$$

□

Si nous arrivons à trouver un entier q inférieur à a_n et tel qu'il est défini dans le lemme 1.2.7, l'ensemble des restes modulo q des éléments a_i translaté de $q/4$ nous fournira notre fameux ensemble B . La force de ce lemme est qu'il n'implique aucune perte de cardinal, $\#B = \#A = n$, ce qui nous permet de répéter son application sans dommage. En prouvant l'existence d'un tel entier q et en itérant le lemme 1.2.7, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 1.2.8. *Soit n un entier et $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de cardinal n . Il existe un ensemble d'entiers $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ tel que $0 < b_1 < \dots < b_n < 4^{nA^n}$, et*

$$F(B)[g] \leq F(A)[g].$$

Preuve. Si $a_n \leq 4^{n^4}$, on prend $B = A$ et la preuve est terminée. Supposons donc que $a_n > 4^{n^4}$. Pour utiliser le lemme 1.2.7 et assurer que tous les restes soient différents, nous avons besoin d'un nombre premier qui ne divise aucune des différences $a_i - a_j$ ($i \neq j$). Il existe un tel nombre premier dans $\llbracket 2, n^2 \log a_n \rrbracket$. En effet supposons que quelque soit $p \in \mathbb{P} \cap \llbracket 2, n^2 \log a_n \rrbracket$, p divise $a_i - a_j$ pour un certain (i, j) . Ainsi si on note $\mathcal{P} = \mathbb{P} \cap \llbracket 2, n^2 \log a_n \rrbracket$, alors $\prod_{p \in \mathcal{P}} p$ divise $\prod_{i > j} (a_i - a_j)$. D'où

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \log p \leq \sum_{i > j} \log (a_i - a_j) < \binom{n}{2} \log(a_n) = \frac{n(n-1)}{2} \log(a_n) .$$

Or

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \log p = \int_{2^-}^{n^2 \log(a_n)} \log k \, d\pi(k) \sim n^2 \log(a_n).$$

Ainsi

$$n^2 \log(a_n) \lesssim \frac{n^2}{2} \log(a_n),$$

ce qui est absurde. Soit donc p un nombre premier inférieur à $n^2 \log a_n$ qui ne divise aucune des différences $a_i - a_j$. On pose $Q = p(4^n)!$ et on définit les relations d'équivalence suivantes :

- Soient a et b deux entiers, on pose $a \sim b$ si et seulement si il existe $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $(a \bmod Q)$ et $(b \bmod Q)$ appartiennent tous deux à $\llbracket kQ/4, (k+1)Q/4 \rrbracket$.

- Soient $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n$, on pose $(a_i)_{i=1}^n \sim (b_i)_{i=1}^n$ si et seulement si $a_i \sim b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Par le principe des tiroirs, il existe $1 \leq t < t' \leq 4^n + 1$ tels que $(ta_i)_{i=1}^n \sim (t'a_i)_{i=1}^n$. Posons $T = t' - t$, on a $1 \leq T \leq 4^n$ et $Ta_i = H_i Q + R_i$ où $|R_i| < Q/4$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Remarquons que $Q/T =: q$ est un entier (grâce au $(4^n)!$ dans la définition de Q), ainsi $R_i/T =: r_i$ est un entier également. Donc finalement

$$a_i = qH_i + r_i \quad , \quad |r_i| < q/4 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} .$$

D'autre part, comme $p|q$, q ne divise aucune des différences $a_i - a_j$ où $i \neq j$. Ainsi $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$. Nous avons donc trouvé un entier $q < 4^{n^4}$ respectant les conditions du lemme 1.2.7. De cette manière

$$F\left(\{a_i\}_{i=1}^n\right)[g] \geq F\left(\left\{r_i + \frac{q}{4}\right\}_{i=1}^n\right)[g],$$

et $r_i + \frac{q}{4} < \frac{q}{2}$ quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$. En remplaçant A par $A' = \left\{r_i + \frac{q}{4}\right\}_{i=1}^n$, nous pouvons recommencer cette construction. De plus, comme $\max A' < \frac{q}{2}$, nous pouvons itérer le procédé jusqu'à obtenir un ensemble finale A^F vérifiant $\max A^F < 4^{n^4}$. Ce qui termine la preuve de cette proposition. \square

Désormais nous allons plusieurs fois avoir recours au lemme suivant.

Lemme 1.2.9. *Soit n un entier, $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ un ensemble d'entiers naturels de cardinal n et $p \geq n$ un nombre premier ne divisant aucune des différences $b_i - b_j$ ($i > j$). Il existe un entier $t \in \{1, \dots, p-1\}$ et $B' \subset B$ de cardinal $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$ tels que*

$$tb_i = h_i p + r_i \quad \text{pour tout } b_i \in B',$$

où tous les r_i sont distincts et compris entre $-p/4$ et $p/4$.

Preuve. On considère les tb_i pour $t \in \{1, \dots, p-1\}$

$$tb_i = th'_i p + tr'_i.$$

Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, r'_i est inversible si il est non nul, ainsi

$$\{tr'_i\}_{t=1}^{p-1} = \begin{cases} \{0\} & \text{si } r'_i = 0 \\ \{1, \dots, p-1\} & \text{si } r'_i \neq 0 \end{cases}$$

Il y a donc (au moins) $\frac{p-1}{2}$ éléments t pour lesquels tb_i a son résidu modulo p dans $\left] \frac{-p}{4}, \frac{p}{4} \right[$, et donc par moyenne, il existe $t \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que $tb_i \pmod p \in \left] \frac{-p}{4}, \frac{p}{4} \right[$ pour la moitié des i . Enfin, le fait que p ne divise aucune différence assure que les restes sont bien distincts. On prouve donc le lemme en prenant $r_i = tr'_i$ et $h_i = th'_i$. \square

Grâce à ce lemme, nous allons pouvoir établir la deuxième réduction qui se résume en la proposition suivante.

Proposition 1.2.10. *Soit n un entier, $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de cardinal n . Il existe un ensemble d'entiers $C = \{c_i\}_{i=1}^m$ tel que $m = \frac{n}{2}(1 + o(1))$, $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_m < 4^n n^2 \log n$ et*

$$F(C)[g] \leq F(B)[g].$$

Preuve. Pour démontrer cette proposition nous voulons utiliser le lemme 1.2.9 et donc trouver le nombre premier p le plus petit possible tel qu'il est défini dans le lemme. Pour cela on pose, pour tout nombre premier p ,

$$\psi(p) = \# \{(i, j) \mid i > j, p \mid b_i - b_j\},$$

et

$$T = \sum_{\substack{4^n < p < 4^n n^2 \log n \\ p \in \mathbb{P}}} \psi(p).$$

On a

$$(4^n)^T < \prod_{i>j} (b_i - b_j) < (4^n)^{4^n \binom{n}{2}}.$$

La seconde inégalité utilise simplement le fait que chaque élément du produit est inférieur à $(4^n)^{4^n}$ et qu'il y a $\binom{n}{2}$ éléments dans ce produit. La première est obtenue en minorant les termes du produit inférieurs à 4^n par 1 et ceux supérieurs à 4^n par 4^n . Il suit

$$\begin{aligned} T &< 4^n \binom{n}{2} \\ &< \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) 4^n n^2. \end{aligned}$$

Il existe donc un nombre premier q dans $\{4^n, \dots, \lfloor 4^n n^2 \log n \rfloor\}$ tel que

$$\psi(q) < \frac{\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) 4^n n^2}{\pi(4^n n^2 \log n) - \pi(4^n)}.$$

Par le théorème des nombres premiers, on obtient

$$\psi(q) < \left(\frac{\log 4}{2} + o(1) \right) \frac{n}{\log n} < \frac{n}{\log n}.$$

Ainsi q ne divise qu'au plus $\frac{n}{\log n}$ différences de deux éléments de B . Si nous enlevons de B un des deux éléments formant chacune de ces différences, nous obtenons un sous-ensemble de B de cardinal $\nu > n(1 - 1/\log n)$ tel que q ne divise aucune différence de deux de ses éléments. On peut donc appliquer le lemme 1.2.9 puis le lemme 1.2.7, et par une translation par $\lceil q/4 \rceil$, on obtient la proposition 1.2.10. \square

Cette nouvelle réduction nous permet donc d'imposer la borne $4^n n^2 \log n$ à nos éléments en n'en perdant qu'au plus la moitié. Nous avons donc gagné exponentiellement sur la borne supérieure de nos éléments. Nous allons donc recommencer cette opération mais en ajoutant un paramètre que nous optimiserons plus tard.

Proposition 1.2.11. *Soit n un entier et $C = \{c_i\}_{i=1}^m$ l'ensemble dont l'existence a été montrée dans la proposition 1.2.10. On rappelle que $m = \frac{n}{2}(1 + o(1))$ et que $\max C < 4^n n^2 \log n$. Soit $\delta > \log(2)/4$, il existe un ensemble d'entiers $D = \{d_i\}_{i=1}^l$ tel que $l = (1 - \log(2)/4 + o(1))\frac{n}{4}$, $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_l < \delta n^2$ et*

$$F(D)[g] \leq F(C)[g].$$

Preuve. De la même manière que dans la preuve de la proposition 1.2.10, pour tout premier p entre $n^2/\log n$ et $2\delta n^2$ on pose

$$\psi(p) = \# \{(i, j) / i > j, p \mid c_i - c_j\},$$

et

$$T = \sum_{\substack{n^2/\log n < p < 2\delta n^2 \log n \\ p \in \mathbb{P}}} \psi(p).$$

Comme $\max C < 4^n n^2 \log n$, on a $c_i - c_j < 4^n n^2 \log n$. Ainsi

$$\left(\frac{n^2}{\log n} \right)^T < \prod_{i>j} (c_i - c_j) < (4^n n^2 \log n)^{\binom{m}{2}},$$

d'où il découle

$$T < \left(\frac{\log 2}{8} + o(1) \right) \frac{n^3}{\log n}.$$

Par moyenne, il existe un certain nombre premier q satisfaisant $n^2/\log n < q < 2\delta n^2$ et pour lequel

$$\psi(q) < \frac{\left(\frac{\log 2}{8} + o(1) \right) \frac{n^3}{\log n}}{\pi(2\delta n^2) - \pi\left(\frac{n^2}{\log n} \right)}.$$

Finalement

$$\psi(q) < \left(\frac{\log 2}{8\delta} + o(1) \right) n = \left(\frac{\log 2}{4\delta} + o(1) \right) m,$$

et de la même façon que pour la proposition 1.2.10, on conclut en appliquant les lemmes 1.2.9 et 1.2.7 puis en translatant par $\lceil q/4 \rceil$. \square

Nous sommes donc désormais amenés à considérer que nos éléments sont inférieurs à δn^2 ce qui est une bien meilleure borne mais elle est encore trop élevée pour nous permettre de conclure efficacement. Cependant, elle est également trop petite pour utiliser à nouveau la technique des preuves donnant les propositions 1.2.10 et 1.2.11. En travaillant un peu plus, nous allons tout de même établir la proposition suivante.

Proposition 1.2.12. *Soit n un entier et $D = \{d_i\}_{i=1}^l$ l'ensemble dont l'existence a été montrée dans la proposition 1.2.11. On rappelle que $l = \frac{n}{4}(1 - \log(2)/4 + o(1))$ et $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_l < \delta n^2$. Soit $\beta > \sqrt{\delta/2}$ un réel positif et*

$$\gamma = (256\beta\delta^2 - 64\beta\delta \log 2 - 16\delta^2 + 8\delta \log 2 - (\log 2)^2)/(4096\beta\delta^2). \quad (1.2.1)$$

Il existe un ensemble d'entiers $E = \{e_i\}_{i=1}^s$ tel que $0 < e_1 < \dots < e_s < \beta n/2$, $s = (\gamma + o(1))n$ et

$$F(E)[g] \leq F(D)[g].$$

Preuve. Soient p et q deux nombres premiers tels que $q > \beta n$ le plus petit possible, $p < 2q$ et p congru à 1 modulo 4 le plus grand possible. On a

$$pq = 2\beta^2 n^2(1 + o(1)),$$

et $p \neq q$ pour n assez grand. On va translater la plus grosse partie de D "autour" des multiples de p . Par le principe des tiroirs, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $\tilde{D} \subset D$ de cardinal $t = \lfloor l/2 \rfloor$ tels que

$$d_i + \lambda = h_i p + r_i \quad \text{où} \quad |r_i| < p/4 \quad \text{pour tout} \quad d_i \in \tilde{D}.$$

Quitte à réindexer, on peut supposer que $\tilde{D} = \{d_i\}_1^t$. Posons

$$\alpha(u, i) = h_i u p + r_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq u \leq q-1 \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq t,$$

ainsi que

$$\psi_u(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \mid \alpha(u, i) - \alpha(u, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour tout } 1 \leq j < i \leq t \text{ et } 1 \leq u \leq q-1.$$

Fait 1. *Soit $i > j$, il existe au maximum un $u \in \{1, \dots, q-1\}$ tel que $\psi_u(i, j) = 1$.*

Preuve. Supposons qu'on ait $\psi_u(i, j) = \psi_v(i, j) = 1$ pour certains $1 \leq u < v \leq q-1$ et $1 \leq j < i \leq t$. On a alors $q \mid \alpha(u, i) - \alpha(u, j)$ et $q \mid (\alpha(v, i) - \alpha(v, j))$, donc

$$\begin{aligned} q \mid (\alpha(u, i) - \alpha(u, j)) - (\alpha(v, i) - \alpha(v, j)) &\Rightarrow q \mid u h_i p - u h_j p - v h_i p + v h_j p \\ &\Rightarrow q \mid p(h_i - h_j)(u - v) \\ &\Rightarrow q \mid h_i - h_j \end{aligned}$$

car p est premier, $p < 2q$ et $u < v \leq q - 1$ donc $q \nmid p$ et $q \nmid (v - u)$. Or $h_i \neq h_j$ car sinon

$$q \mid \alpha(u, i) - \alpha(u, j) \Rightarrow q \mid r_i - r_j$$

et

$$0 \leq |r_i - r_j| < p/2 < q \Rightarrow r_i = r_j$$

et donc $d_i = d_j$. D'où $|h_i - h_j| \geq q$, et ainsi

$$\begin{aligned} |d_i - d_j| &= |(d_i + \lambda) - (d_j + \lambda)| = |(h_i - h_j)p + r_i - r_j| \\ &\geq |pq| - |r_i - r_j| \\ &\geq 2\beta^2 n^2 (1 + o(1)) - |r_i - r_j| \\ &\geq 2\beta^2 n^2 (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Ceci est absurde car $|d_i - d_j| < \delta n^2 < 2\beta^2 n^2$ (c'est ici qu'on a besoin de la contrainte sur β). \square

Ainsi par le fait 1, on a

$$\sum_{u=1}^{q-1} \sum_{j < i \leq t} \psi_u(i, j) = \sum_{j < i \leq t} \sum_{u=1}^{q-1} \psi_u(i, j) \leq \sum_{j < i \leq t} 1 \leq \binom{t}{2}.$$

Et par moyenne, il existe $u \in \{1, \dots, q - 1\}$ tel que

$$\sum_{j < i \leq t} \psi_u(i, j) \leq \binom{t}{2} \frac{1}{q - 1}.$$

On peut désormais réutiliser les arguments des propositions 1.2.10 et 1.2.11 : quitte à ré-indexer on peut supposer que $q \nmid \alpha(u, i) - \alpha(u, j)$ quels que soient $i, j \in \{1, \dots, \nu\}$ $i > j$ où $\nu = t - \lfloor \binom{t}{2} / (q - 1) \rfloor$. Il suffit alors, comme pour la fin des preuves des propositions 1.2.10 et 1.2.11, d'utiliser les lemmes 1.2.9 et 1.2.7 et de translater afin de conclure. \square

Maintenant que nous avons prouvé les propositions 1.2.8 1.2.10 1.2.11 et 1.2.12, nous avons suffisamment réduit le diamètre de notre ensemble à étudier pour pouvoir conclure. Nous allons nous reposer sur le lemme combinatoire suivant.

Lemme 1.2.13. *Soient X et Y deux ensembles d'entiers inclus dans $\{1, \dots, m\}$. Il existe un entier i avec $-m < i < m$ tel que*

$$|(Y + i) \cap X| \geq \frac{|X| |Y|}{2m}.$$

Preuve. Il suffit de constater que pour $x \in X$ et $y \in Y$, il existe un unique $i \in \{-m + 1, \dots, m - 1\}$ tel que $y + i = x$. Ainsi

$$\sum_{|i| < m} |(Y + i) \cap X| = \sum_{x \in X} |Y| = |X| |Y|.$$

Le lemme se déduit par moyenne sur les i . \square

La preuve du théorème 1.2.6 va finalement découler de ce lemme. En effet, grâce aux propositions 1.2.8 1.2.10 1.2.11 et 1.2.12, nous avons

$$F(A)[g] \geq F(E)[g],$$

où E est un ensemble de cardinal $(\gamma + o(1))n$ dans les $\lfloor \beta n/2 \rfloor$ premiers entiers. On rappelle que γ est défini par (1.2.1). Pour conclure, nous n'avons qu'à utiliser le lemme 1.2.13 avec $X = E$, $Y \in B_2[g](\llbracket 1, \beta n/2 \rrbracket)$ le plus gros possible, et à optimiser γ en fonction de β et δ avec les contraintes $\delta > \log(2)/4$ (cf. la proposition 1.2.11) et $\beta > \sqrt{\delta/2}$ (cf. la proposition 1.2.12).

Pour le choix de Y , il s'agit donc de prendre un ensemble de cardinal maximal dans $B_2[g](\llbracket 1, \beta n/2 \rrbracket)$. Pour cela, nous allons nous appuyer sur les meilleures bornes connues à ce jour. Si $g \geq 3$, alors Cilleruelo, Ruzsa et Trujillo [8] ont démontré que

$$F(\llbracket 1, n \rrbracket)[g] \geq \lambda_g \sqrt{n} + o(\sqrt{n}), \quad (1.2.2)$$

où $\lambda_g = \frac{g + \lfloor g/2 \rfloor}{\sqrt{g + 2 \lfloor g/2 \rfloor}}$. Cette borne a été améliorée pour $g = 2$ par Habsieger et Plagne [13] qui établissent

$$F(\llbracket 1, n \rrbracket)[2] \geq 1,5119\sqrt{n}. \quad (1.2.3)$$

Appliquons donc le lemme 1.2.13 avec $X = E$, $Y \in B_2[g](\llbracket 1, \beta n/2 \rrbracket)$ tel que $\#Y \geq \lambda_g \sqrt{\beta n/2} + o(\sqrt{n})$, où

$$\lambda_g = \begin{cases} 1,5119 & \text{si } g = 2 \\ \frac{g + \lfloor g/2 \rfloor}{\sqrt{g + 2 \lfloor g/2 \rfloor}} & \text{si } g \geq 3 \end{cases}.$$

Il existe donc un entier k avec $|k| < \frac{\beta n}{2}$ tel que

$$\begin{aligned} |(E + k) \cap Y| &\geq \frac{|E| |Y|}{\beta n} \\ &\geq \frac{(\gamma + o(1))n (\lambda_g \sqrt{\beta n/2} + o(\sqrt{n}))}{\beta n} \\ &\geq 0,0402 \lambda_g \sqrt{n} + o(\sqrt{n}), \end{aligned}$$

où la dernière ligne découle de l'optimisation de la fonction

$$f(\beta, \delta) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}} = \frac{256\beta\delta^2 - 64\beta\delta \log 2 - 16\delta^2 + 8\delta \log 2 - (\log 2)^2}{4096\sqrt{2}\delta^2\beta^{3/2}},$$

avec les contraintes $\delta > \log(2)/4$ (cf. la proposition 1.2.11) et $\beta > \sqrt{\delta/2}$ (cf. la proposition 1.2.12). Le résultat est obtenu avec $\beta = 0,6834$ et $\delta = 0,9340$. Ce qui termine la preuve de ce théorème 1.2.6.

Les lecteurs familiers avec les travaux de Komlós, Sulyok, Szemerédi [20] et d'Abbott [1] pourront s'apercevoir que notre preuve a très fortement été guidée par les idées développées dans leurs articles.

Remarque 1.2.14. *Le théorème 1.2.6 dépend de la minoration du cardinal du plus gros $B_2[g]$ dans les n premiers entiers. Nous avons utilisé les meilleures minoration connues à ce jour mais toute amélioration de ces résultats améliorera automatiquement la borne de notre théorème 1.2.6.*

Pour les ensembles de Sidon, donc le cas $g = 1$, Abbott utilise la même stratégie mais conclut en utilisant le théorème de Singer.

Théorème 1.2.15 (Singer). *Soit p un nombre premier. Il existe $p + 1$ ensembles de Sidon S_1, \dots, S_p tous de cardinal $p + 1$ tels que*

$$\bigcup_{i=1}^p S_i = \{1, \dots, p^2 + p + 1\}.$$

Pour les ensembles $B_2[g]$, nous avons du remplacer l'emploi de ce théorème par le lemme 1.2.13. Le fait que notre résultat n'améliore la borne obtenue par Abbott que pour $g \geq 6$ illustre la puissance du théorème de Singer.

Le théorème d'Abbott (théorème 1.0.1) signifie que n'importe quel ensemble d'entiers de cardinal n contient un ensemble de Sidon de cardinal au moins $0,0805\sqrt{n}$ et donc

$$F(A) > 0,0805\sqrt{\#A}.$$

Nous pensons en fait que l'intervalle est le milieu le plus "hostile" pour accueillir des ensembles de Sidon et que n'importe quel autre ensemble ambiant favoriserait l'existence de gros ensembles de Sidon. Erdős a conjecturé que $g(n) \sim \sqrt{n}$ et donc qu'on pourrait augmenter la constante 0,0805 jusque 1, ce qui consoliderait l'idée que c'est dans les intervalles qu'il est le plus difficile de construire de gros ensembles de Sidon.

Actuellement c'est la constante 0,0805 d'Abbott qui a le record et nous sommes donc encore loin de 1. Dans la partie suivante nous établirons quelques constructions explicites nous permettant d'obtenir de meilleurs bornes lorsque l'ensemble ambiant n'est plus quelconque mais possède certaines structures, par exemple si l'ensemble ambiant est une union finie d'intervalles.

1.3 Minoration du cardinal du Sidon maximal dans certaines dégénérescences de l'intervalle

Nous avons vu dans le théorème 1.1.1, que si A est l'union de deux intervalles de cardinal n_1 et n_2 , alors

$$F(A) \leq \sqrt{\#A} + \sqrt{2}(\#A)^{1/4} + o((\#A)^{1/4}).$$

On sait également grâce à Abbott, que dans une telle union, on peut toujours trouver un ensemble de Sidon de cardinal $0,0805\sqrt{n_1 + n_2}$. Mais le résultat d'Abbott concerne tous les ensembles de cardinal $n_1 + n_2$. Peut-on dire mieux lorsqu'on sait que l'ensemble ambiant est une union de deux intervalles ? La réponse est oui, il suffit en fait de choisir un ensemble de Sidon dans le plus gros des deux intervalles. En effet, si on suppose par exemple que $n_1 \geq n_2$ alors

$$F(A) \geq \sqrt{n_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2n_1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n_1 + n_2} > 0,707\sqrt{n_1 + n_2}.$$

De même, si A est l'union de k intervalles tel que $\#A = n$, alors ce raisonnement fournit la borne

$$F(A) \geq \sqrt{\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil} \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{n},$$

ce qui fournit une meilleure borne que celle du théorème d'Abbott pour tout $k \leq 154$.

Revenons à $k = 2$, nous allons voir que nous pouvons dire encore mieux. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.3.1 (théorème F). *Notons $\mathcal{A}(n_1, n_2)$ l'ensemble de toutes les unions de deux intervalles de cardinal n_1 et n_2*

$$\mathcal{A}(n_1, n_2) = \{I_1 \sqcup I_2 \mid I_1 \text{ et } I_2 \text{ sont des intervalles, } \#I_1 = n_1, \#I_2 = n_2\},$$

on a

$$\min \{F(A) \mid A \in \mathcal{A}(n_1, n_2)\} \gtrsim 0,8444\sqrt{n_1 + n_2}.$$

Preuve. Quitte à translater, et à considérer $A' = \max A - A$, on peut supposer que $A = I_1 \sqcup I_2$ où $I_1 = \llbracket 1, n_1 \rrbracket$, et I_2 est un intervalle tel que $\#I_2 = n_2 \leq n_1$.



Stratégie : Nous allons discuter selon deux paramètres : la taille de I_2 par rapport à I_1 , et la distance entre I_1 et I_2 . Pour cela on posera

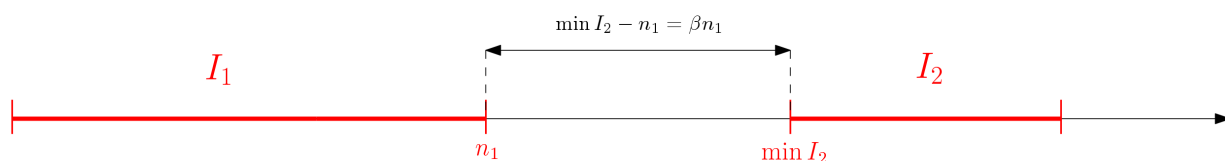
$$\alpha = \frac{n_2}{n_1}$$

et

$$\beta = \frac{\min I_2 - n_1}{n_1}.$$

Nous allons distinguer plusieurs cas. Tout d'abord, si α est inférieur à un certain seuil α_0 (qu'il nous faudra optimiser à la fin de la preuve) alors nous n'aurons qu'à choisir un gros ensemble de Sidon dans I_1 . En effet, si α est petit, alors I_2 est petit devant I_1 . Nous n'aurons donc pas besoin de sa contribution pour choisir notre ensemble de Sidon. Si en revanche, α est supérieur à α_0 , alors nous distinguerons encore deux cas selon la taille de β . Si β est inférieur à un certain seuil β_0 (qu'il nous faudra également optimiser à la fin de la preuve), alors I_2 est suffisamment proche de I_1 . Pour obtenir un gros ensemble de Sidon dans $I_1 \cup I_2$, nous enlèverons les éléments du milieu $\llbracket n_1, \min I_2 \rrbracket$ à un gros ensemble de Sidon dans $\llbracket 1, \max I_2 \rrbracket$. Nous nous appuierons sur le fameux théorème de Singer (théorème 1.2.15) afin de nous assurer de l'existence d'un gros ensemble de Sidon dans $\llbracket 1, \max I_2 \rrbracket$ sans trop d'éléments dans $\llbracket n_1, \min I_2 \rrbracket$. Enfin si β est supérieur au seuil β_0 , nous effectuerons une légère transformation sur un ensemble de Sidon dans $\llbracket 1, n_1 + n_2 \rrbracket$ pour obtenir un gros ensemble de Sidon dans $I_1 \cup I_2$.

Soient $\alpha_0 \in [0, 1]$, $\beta_0 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha = \frac{n_2}{n_1}$ et $\beta = \frac{\min I_2 - n_1}{n_1}$.



i) Si $\alpha \leq \alpha_0$.

On écrit $n_2 = \alpha n_1$ (avec possiblement $\alpha = 0$). Il suffit alors de choisir un ensemble de Sidon S dans I_1 de cardinal $\sqrt{n_1}$. De cette manière, on a

$$\begin{aligned} F(A) &\geq \sqrt{n_1} \\ &\geq \sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\alpha} n_1} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \sqrt{n_1 + n_2} + o(n_1) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_0}} \sqrt{n_1 + n_2} + o(n_1). \end{aligned}$$

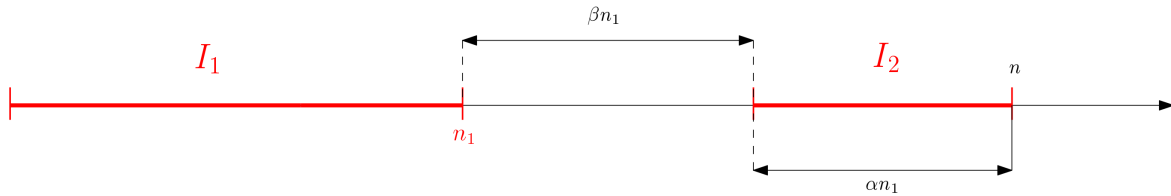
Finalement comme $\#A = n_1 + n_2$, dans ce cas on obtient

$$F(A) \gtrsim \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_0}} \sqrt{\#A}. \quad (1.3.1)$$

ii) Si $\alpha \geq \alpha_0$ et $\beta \leq \beta_0$.

On écrit toujours $n_2 = \alpha n_1$ et on rappelle que $\beta = \frac{\min I_2 - n_1}{n_1}$. De cette manière, si $n = \max A$, on a

$$n = (1 + \alpha + \beta)n_1. \quad (1.3.2)$$



Nous voulons utiliser le théorème de Singer dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, et il nous faut donc approcher n par $p^2 + p + 1$ où p est un nombre premier. Cela revient à approcher $\sqrt{n - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$ par un nombre premier. Soient p et p' les deux nombres premiers consécutifs tels que

$$p \leq \sqrt{n - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} < p'.$$

Comme p et p' sont consécutifs, il est bien connu que $p' - p = O(p^{5/8})$ (voir [16]). (En fait, de meilleurs résultats existent sur la majoration de la distance entre deux nombres premiers consécutifs (voir [15]) mais cette borne nous suffit amplement).

On a $p \leq \sqrt{n - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$ donc $p^2 + p + 1 \leq n$. D'après le théorème de Singer 1.2.15, il existe $p + 1$ ensembles de Sidon S_i ($i = 1, \dots, p + 1$) de cardinal $p + 1$ chacun, tels que leur union est égale à $\llbracket 1, p^2 + p + 1 \rrbracket$.

Comme $\sqrt{n - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = p + O(p^{5/8})$, on a $n = p^2 + O(p^{5/4})$, donc $\llbracket n_1, \min I_2 \rrbracket \subset \llbracket 1, p^2 + p + 1 \rrbracket$, donc

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} (S_i \cap \llbracket n_1, \min I_2 \rrbracket) = \llbracket n_1, \min I_2 \rrbracket,$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{p+1} \#(S_i \cap \llbracket n_1, \min I_2 \rrbracket) = \beta n_1 + o(n_1).$$

Ainsi, par moyenne, il existe $S \in \{S_i\}_{i=1}^{p+1}$ tel que

$$\#(S \cap \llbracket n_1, \min I_2 \rrbracket) \leq \frac{\beta}{p+1} n_1 + o\left(\frac{n_1}{p}\right).$$

Finalement, posons $S' = S \setminus \llbracket n_1, \min I_2 \rrbracket$. De cette manière, $S' \subset A$ et

$$\#S' \geq p + 1 - \frac{\beta}{p+1} n_1 + o\left(\frac{n_1}{p}\right),$$

ce qui nous permet de conclure. En effet, comme $n = p^2 + O(p^{5/4})$, on a $p = \sqrt{n} + o(n^{5/16})$, et ainsi par (1.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} F(A) &\geq \#S' \\ &\geq \sqrt{n} - \frac{\beta}{1 + \alpha + \beta} \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \\ &\geq \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + \beta} \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \\ &\geq \frac{1 + \alpha}{\sqrt{1 + \alpha + \beta}} \sqrt{n_1} + o(\sqrt{n}) \\ &\geq \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{\sqrt{1 + \alpha + \beta}} \sqrt{n_1(1 + \alpha)} + o(\sqrt{n}) \\ &\geq \sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + \beta}} \sqrt{n_1 + n_2} + o(\sqrt{n_1 + n_2}) \\ &\geq \sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + \beta_0}} \sqrt{n_1 + n_2} + o(\sqrt{n_1 + n_2}). \end{aligned}$$

De plus la fonction qui à x associe $\sqrt{\frac{1 + x}{1 + x + \beta_0}}$ est croissante et nous sommes dans le cas où $\alpha \geq \alpha_0$, donc finalement

$$F(A) \gtrsim \sqrt{\frac{1 + \alpha_0}{1 + \alpha_0 + \beta_0}} \sqrt{\#A}. \quad (1.3.3)$$

iii) Si $\alpha \geq \alpha_0$ et $\beta \geq \beta_0$.

Ici, nous allons distinguer les cas $\beta_0 \geq 1$ et $\beta_0 < 1$.

iii.a. Si $\beta_0 \geq 1$.

Alors $\beta \geq 1$ et donc I_1 et I_2 donc suffisamment éloignés.



Nous choisissons alors un ensemble de Sidon S dans $\llbracket 1, n_1 + n_2 \rrbracket$ et nous définissons le nouvel ensemble S' par

$$S' = S_1 \sqcup S_2,$$

où $S_1 = S \cap \llbracket 1, n_1 \rrbracket$ et $S_2 = S \cap \llbracket n_1, n_1 + n_2 \rrbracket + \min I_2 - n_1$. Ainsi $S' \subseteq A$ et nous allons voir que S' est un ensemble de Sidon. Commençons par noter que S_1 et S_2 sont des ensembles de Sidon. Soient $a, b, c, d \in S'$ tels que $a + b = c + d$. Nous allons distinguer les trois cas suivants : a et b appartiennent tous deux à S_1 , tous deux à S_2 , ou l'un appartient à S_1 et l'autre à S_2 .

- $a, b \in S_1$.

On a alors $a + b < 2n_1$ et les équivalences suivantes

$$a, b \in S_1 \Leftrightarrow a + b < 2n_1 \Leftrightarrow c + d < 2n_1 \Leftrightarrow c, d \in S_1.$$

Ainsi $a, b, c, d \in S_1$ et S_1 est un ensemble de Sidon, donc $\{a, b\} = \{c, d\}$.

- $a, b \in S_2$.

Alors comme $\min I_2 - n_1 \geq n_1$, on a $a + b > 4n_1$ et les équivalences suivantes

$$a, b \in S_2 \Leftrightarrow a + b > 4n_1 \Leftrightarrow c + d > 4n_1 \Leftrightarrow c, d \in S_2.$$

Ainsi $a, b, c, d \in S_2$ et S_2 est un ensemble de Sidon, donc $\{a, b\} = \{c, d\}$.

- $a \in S_1$ et $b \in S_2$.

On a vu dans les équivalences des deux premiers points qu'alors nécessairement c et d ne peuvent ni tous deux appartenir à S_1 ni tous deux appartenir à S_2 . Supposons donc sans perdre en généralité que $c \in S_1$ et $d \in S_2$. Ainsi on a

$$a + b = c + d \Leftrightarrow a + (b - \min I_2 + n_1) = c + (d - \min I_2 + n_1),$$

et $a, (b - \min I_2 + n_1), c, (d - \min I_2 + n_1) \in S$ par construction de S_1 et S_2 . Donc $\{a, (b - \min I_2 + n_1)\} = \{c, (d - \min I_2 + n_1)\}$ puisque S est de Sidon. De plus, comme $a, c \in S_1$ et $b, d \in S_2$, on a $a, c \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket$ et $(b - \min I_2 + n_1), (d - \min I_2 + n_1) \in \llbracket n_1, n_1 + n_2 \rrbracket$. D'où $a = c$ et $(b - \min I_2 + n_1) = (d - \min I_2 + n_1)$ donc finalement $a = c$ et $b = d$.

En conclusion, quel que soit le cas dans lequel on se trouve, on obtient toujours $\{a, b\} = \{c, d\}$, ce qui signifie que S' est un ensemble de Sidon. Il suffit alors de remarquer que $\#S' = \#S$ et de rappeler que dans $\llbracket 1, n_1 + n_2 \rrbracket$, on sait construire des ensembles de Sidon de cardinal $\sqrt{n_1 + n_2}$, pour pouvoir conclure que lorsque $\min I_2 - n_1 \geq n_1$, on a

$$F(A) \gtrsim \sqrt{\#A}. \quad (1.3.4)$$

iii.b. Si $\beta_0 < 1$.

Nous allons suivre la même stratégie mais comme dans le cas **iii)**, nous allons nous appuyer sur le théorème de Singer afin d'enlever les éléments gênants. Cette fois nous voulons travailler dans $\llbracket 1, n_1 + n_2 \rrbracket$. Il s'agit donc d'approcher $n_1 + n_2$ par $p^2 + p + 1$ où p est un nombre premier. Soient donc p et p' les deux nombres premiers consécutifs tels que

$$p \leq \sqrt{n_1 + n_2 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} < p'.$$

Encore une fois, comme p et p' sont consécutifs, on sait que $p' - p = O(p^{5/8})$ (voir [16]). Ainsi $\sqrt{n_1 + n_2 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = p + O(p^{5/8})$ et donc $n_1 + n_2 = p^2 + O(p^{5/4})$. On en déduit

$$\left\llbracket \frac{1 + \beta}{2} n_1, n_1 \right\llbracket \subset \llbracket 1, p^2 + p + 1 \rrbracket,$$

et comme dans le cas précédent, par le théorème de Singer puis par moyenne il existe un ensemble de Sidon S dans $\llbracket 1, p^2 + p + 1 \rrbracket$ de cardinal $p + 1$ et tel que

$$\# \left(S \cap \left\llbracket \frac{1 + \beta}{2} n_1, n_1 \right\llbracket \right) \leq \frac{1 - \beta}{2(p + 1)} n_1 + o\left(\frac{n_1}{p}\right).$$

On pose $S' = S \setminus \left\llbracket \frac{1 + \beta}{2} n_1, n_1 \right\llbracket$. On a

$$\begin{aligned} \#S' &\geq p + 1 - \frac{1 - \beta}{2(p + 1)} n_1 + o\left(\frac{n_1}{p}\right) \\ &\geq \sqrt{n_1 + n_2} - \frac{1 - \beta}{2(1 + \alpha)} \sqrt{n_1 + n_2} + o\left(\sqrt{n_1 + n_2}\right) \\ &\geq \frac{1 + 2\alpha + \beta}{2(1 + \alpha)} \sqrt{n_1 + n_2} + o\left(\sqrt{n_1 + n_2}\right) \\ &\geq \frac{1 + 2\alpha + \beta_0}{2(1 + \alpha)} \sqrt{n_1 + n_2} + o\left(\sqrt{n_1 + n_2}\right). \end{aligned}$$

Or la fonction qui à x associe $\mapsto \frac{1 + 2x + \beta_0}{2(1 + x)}$ est croissante, d'où

$$\#S' \gtrsim \frac{1 + 2\alpha_0 + \beta_0}{2(1 + \alpha_0)} \sqrt{n_1 + n_2}. \quad (1.3.5)$$

Enfin définissons le nouvel ensemble S'' par

$$S'' = S_1 \sqcup S_2,$$

où $S_1 = S' \cap \llbracket 1, \frac{1 + \beta}{2} n_1 \rrbracket$ et $S_2 = S' \cap \llbracket \frac{1 + \beta}{2} n_1, n_1 + n_2 \rrbracket + \min I_2 - n_1$. Ainsi $S'' \subseteq A$ et nous allons voir que S'' est un ensemble de Sidon. Commençons par noter que S_1 et S_2 sont des ensembles de Sidon. Soient $a, b, c, d \in S'$ tels que $a + b = c + d$. Nous allons distinguer les trois cas suivants : a et b appartiennent tous deux à S_1 , tous deux à S_2 , ou l'un appartient à S_1 et l'autre à S_2 .

- $a, b \in S_1$.

On a alors $a + b < (1 + \beta)n_1$ et donc les équivalences suivantes

$$a, b \in S_1 \Leftrightarrow a + b < (1 + \beta)n_1 \Leftrightarrow c + d < (1 + \beta)n_1 \Leftrightarrow c, d \in S_1.$$

Ainsi $a, b, c, d \in S_1$ et S_1 est un ensemble de Sidon, donc $\{a, b\} = \{c, d\}$.

- $a, b \in S_2$.

Alors comme $\min I_2 - n_1 = \beta n_1$, on a $a + b > (2 + 2\beta)n_1$ et ainsi on a les équivalences suivantes

$$a, b \in S_2 \Leftrightarrow a + b > (2 + 2\beta)n_1 \Leftrightarrow c + d > (2 + 2\beta)n_1 \Leftrightarrow c, d \in S_2.$$

Ainsi $a, b, c, d \in S_2$ et S_2 est un ensemble de Sidon, donc $\{a, b\} = \{c, d\}$.

- $a \in S_1$ et $b \in S_2$.

On a vu dans les équivalences des deux premiers points qu'alors nécessairement c et d ne peuvent ni tous deux appartenir à S_1 ni tous deux appartenir à S_2 . Supposons donc sans perdre en généralité que $c \in S_1$ et $d \in S_2$. Ainsi on a

$$a + b = c + d \Leftrightarrow a + (b - \min I_2 + n_1) = c + (d - \min I_2 + n_1),$$

et $a, (b - \min I_2 + n_1), c, (d - \min I_2 + n_1) \in S$ par construction de S_1 et S_2 . Donc $\{a, (b - \min I_2 + n_1)\} = \{c, (d - \min I_2 + n_1)\}$ puisque S est de Sidon. De plus, comme $a, c \in S_1$ et $b, d \in S_2$, on a $a, c \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket$ et $(b - \min I_2 + n_1), (d - \min I_2 + n_1) \in \llbracket n_1, n_1 + n_2 \rrbracket$. D'où $a = c$ et $(b - \min I_2 + n_1) = (d - \min I_2 + n_1)$ donc finalement $a = c$ et $b = d$.

En conclusion, quel que soit le cas dans lequel on se trouve, on obtient toujours $\{a, b\} = \{c, d\}$, ce qui signifie que S'' est un ensemble de Sidon. Ainsi $F(A) \geq \#S''$. Finalement comme $\#S'' = \#S'$ et par (1.3.5), on a

$$F(A) \gtrsim \frac{1 + 2\alpha_0 + \beta_0}{2(1 + \alpha_0)} \sqrt{\#A}. \quad (1.3.6)$$

iv) Conclusion.

Quel que soit le cas dans lequel on se trouve, par (1.3.1), (1.3.3), (1.3.6) et (1.3.4), on a

$$F(A) \gtrsim \min \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_0}}, \sqrt{\frac{1 + \alpha_0}{1 + \alpha_0 + \beta_0}}, \frac{1 + 2\alpha_0 + \beta_0}{2(1 + \alpha_0)} \right) \sqrt{\#A}.$$

Il s'agit donc d'optimiser les choix de α_0 et β_0 afin que ce minimum soit le plus élevé possible. Pour cela on commence par demander aux deux premiers termes du minimum d'être égaux. Ce qui nous conduit à l'équation $\alpha_0 = \frac{\sqrt{1 + 4\beta_0} - 1}{2}$. Ensuite on demande aux premier et troisième termes du minimum d'être égaux. Ce qui nous fournit la nouvelle équation $\alpha_0 = \frac{\sqrt{3 - 2\beta_0} - \beta_0}{2}$. Enfin nous voulons trouver le point d'intersection des deux

courbes d'équation $\alpha_0 = \frac{\sqrt{1+4\beta_0}-1}{2}$ et $\alpha_0 = \frac{\sqrt{3-2\beta_0}-\beta_0}{2}$. Ce qui nous conduit à l'équation finale

$$\sqrt{1+4\beta_0}-1 = \sqrt{3-2\beta_0}-\beta_0.$$

Afin de conclure il nous suffit alors de trouver une valeur approchée de la solution de cette équation puis trouver également une valeur approchée de α_0 en reprenant une de nos deux précédentes équations. Avec $\alpha_0 = 0,402$ et $\beta_0 = 0,391$, on obtient

$$F(A) \gtrsim 0,8444\sqrt{\#A}.$$

□

Finalement, grâce à ce théorème 1.3.1 et au théorème 1.1.1, si A est l'union de deux intervalles quelconques de cardinal n_1 et n_2 , on a

$$0,8444\sqrt{n_1+n_2} \lesssim F(A) \leq \sqrt{n_1+n_2} + \sqrt{2}(n_1+n_2)^{1/4} + o((n_1+n_2)^{1/4}).$$

Le théorème 1.1.1 affirme que si A est l'union de k intervalles de cardinal respectif n_1, \dots, n_k , on a toujours l'asymptotique $F(A) \lesssim \sqrt{n_1 + \dots + n_k}$, si $k = o(\sqrt{n_1 + \dots + n_k})$. C'est à partir d'un nombre d'intervalles de même ordre de grandeur que $\sqrt{n_1 + \dots + n_k}$ qu'on ne parvient plus à garder la constante 1 devant l'asymptotique. Nous avons déjà établi que la condition $k = o(\sqrt{n_1 + \dots + n_k})$ était optimale pour pouvoir conclure que $F(A) \lesssim \sqrt{n_1 + \dots + n_k}$. En effet, dans la proposition 1.1.3, nous avons donné la construction explicite d'un ensemble de Sidon de cardinal $2n-1$ dans n intervalles de cardinal n chacun.

Voici une autre construction fournissant un ensemble de Sidon de cardinal $p-1$ dans une union de $\frac{p-1}{2}$ intervalles de cardinal $p-1$.

Théorème 1.3.2. *Si p est un nombre premier, alors il existe un ensemble de Sidon de cardinal $p-1$ dans une union de $\frac{p-1}{2}$ intervalles de cardinal $p-1$.*

Preuve. Soit p un nombre premier et \mathbb{F}_p le corps fini à p éléments. On rappelle que \mathbb{F}_p^* est un groupe multiplicatif et que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p^* &\longrightarrow \mathbb{F}_p^* \\ k &\longmapsto k^2 \end{aligned}$$

fournit un morphisme sur ce groupe. Le noyau de cette application est $\{\pm 1\}$ et ainsi, d'après le premier théorème de l'isomorphisme (cf. [22] chapitre I §4), le nombre de carrés dans \mathbb{F}_p^* est $\frac{p-1}{2}$. Appelons ${}^2\mathbb{F}_p$ l'ensemble de ces carrés et ${}^2\mathcal{F}_p$ leur projection dans les p premiers entiers. Pour tout entier k on définit \bar{k} comme le plus petit entier positif congru à k modulo p .

Définissons l'ensemble d'entiers suivant

$$S = \{2\bar{k}^2p + k \mid k = 1, \dots, p-1\},$$

et prouvons que c'est un ensemble de Sidon. Soient $2\bar{a}^2p + a, 2\bar{b}^2p + b, 2\bar{c}^2p + c$ et $2\bar{d}^2p + d$ quatre éléments de S tels que

$$2\bar{a}^2p + a + 2\bar{b}^2p + b = 2\bar{c}^2p + c + 2\bar{d}^2p + d.$$

On a

$$2(\overline{a^2} + \overline{b^2})p + (a + b) = 2(\overline{c^2} + \overline{d^2})p + (c + d),$$

soit

$$2(\overline{a^2} + \overline{b^2} - \overline{c^2} - \overline{d^2})p = c + d - a - b,$$

et comme a, b, c, d sont tous quatre inférieurs à $p-1$, l'égalité ci-dessus implique le système

$$\begin{cases} \overline{a^2} + \overline{b^2} = \overline{c^2} + \overline{d^2} \\ a + b = c + d \end{cases}.$$

Or

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \overline{a^2} + \overline{b^2} = \overline{c^2} + \overline{d^2} \\ a + b = c + d \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \pmod{p} \\ a + b = c + d \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (a + c)(a - c) = (d + b)(d - b) \pmod{p} \\ a - c = d - b \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \text{soit } \begin{cases} a + c = d + b \\ a - c = d - b \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \{a, b\} = \{c, d\} \end{aligned}$$

donc S est bien un ensemble de Sidon. De plus, comme $(\mathbb{F}_p, +) \simeq (\mathbb{Z}_p, +)$, on a

$$S \subset \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}_p} \llbracket 2kp + 1, 2kp + p - 1 \rrbracket,$$

donc S est inclus dans une union de $\frac{p-1}{2}$ intervalles de cardinal $p-1$ chacun. Finalement comme S est de cardinal $p-1$, ceci prouve le théorème 1.3.2. \square

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de \mathbb{N} . Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on définit $F(\mathcal{A})$ par

$$F(\mathcal{A}) = \sup \{F(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle \mathcal{A}_α ($\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha(n)$) l'ensemble des unions de n/α^2 intervalles de cardinal n chacun. Le premier cas qui nous intéresse est le cas de \mathcal{A}_1 , quand il y a autant d'intervalles que d'éléments qu'ils contiennent. Comme chaque ensemble de \mathcal{A}_α est de cardinal $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2$, la remarque 1.1.2, démontre que pour tout entier n , on a

$$F(\mathcal{A}_1) \lesssim 2,62n.$$

D'autre part, la proposition 1.1.3 donne

$$F(\mathcal{A}_1) \gtrsim 2n,$$

d'où

$$2n \lesssim F(\mathcal{A}_1) \lesssim 2,62n.$$

De cette manière nos travaux prouvent que le coefficient donnant la bonne asymptotique, s'il existe, est compris entre 2 et 2,62.

Le deuxième cas qui nous intéresse est celui de $\mathcal{A}_{\sqrt{2}}$, quand il y a deux fois moins d'intervalles que d'éléments qu'ils contiennent. Cette fois encore, la remarque 1.1.2 fournit la borne

$$F(\mathcal{A}_{\sqrt{2}}) \lesssim 2,266 \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

D'autre part, le théorème précédent prouve que l'asymptotique est supérieure à n pour une infinité d'entiers n . Il est facile d'en déduire le résultat pour tous entiers n , donc pour $\mathcal{A}_{\sqrt{2}}$ tout entier. C'est l'objet du corollaire suivant.

Corollaire 1.3.3. *Si $\mathcal{A}_{\sqrt{2}}$ est défini comme avant, pour tout entier n , on a*

$$F(\mathcal{A}_{\sqrt{2}}) \gtrsim n.$$

Preuve. Soient n un entier, $k = \frac{n}{2}$, et p et p' deux nombres premiers consécutifs tels que $p \leq n < p'$. On sait que $p' - p = O(p^{5/8})$ (voir [16]). Écrivons $k = \frac{p}{2} + o(n)$ et on reprend la construction du théorème 1.3.2. on pose donc

$$S = \{2\bar{k}^2 p + k \mid k = 1, \dots, p-1\}.$$

L'ensemble S est de sidon et de cardinal $p-1$. De plus

$$S \subset \bigsqcup_{i \in {}^2\mathcal{F}_p} \llbracket 2ip + 1, 2ip + p - 1 \rrbracket,$$

Or

$$\bigsqcup_{i \in {}^2\mathcal{F}_p} \llbracket 2ip + 1, 2ip + p - 1 \rrbracket \subset \bigcup_{i \in {}^2\mathcal{F}_p} \llbracket 2ip = 1, 2ip + n - 1 \rrbracket.$$

De plus cette dernière union est en fait disjointe car $2(i+1)p - (2ip + n) = p + O(p^{5/8}) > 0$ quel que soit $i \in {}^2\mathcal{F}_p$ (et p assez grand), donc $\llbracket 2ip + 1, 2ip + n - 1 \rrbracket \cap \llbracket 2jp + 1, 2jp + n - 1 \rrbracket = \emptyset$ quels que soient $i \neq j$. Ainsi

$$S \subset \bigsqcup_{i \in {}^2\mathcal{F}_p} \llbracket 2ip + 1, 2ip + n - 1 \rrbracket.$$

S est donc inclus dans une union de $\frac{p-1}{2}$ intervalles de cardinal $n-1$. De plus, comme $n \geq p$, à fortiori, S est donc inclus dans une union de $\frac{n-1}{2}$ intervalles de cardinal $n-1$. Enfin $\#S = p-1 = n + O(n^{5/8})$, ce qui prouve ce corollaire. \square

Grâce à ce corollaire et à la remarque 1.1.2, nous avons donc

$$\sqrt{2}\sqrt{kn} \lesssim F(\mathcal{A}_{\sqrt{2}}) \lesssim 2,266\sqrt{kn}.$$

Le but est donc d'améliorer ces bornes afin de réussir à trouver la bonne asymptotique, si elle existe.

Il est possible d'améliorer le théorème 1.3.2 en raccourcissant la longueur des intervalles. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.3.4 (théorème G). *Il existe une constante c_0 et une infinité d'entiers n pour lesquels il existe un ensemble de Sidon de cardinal n dans une union de $\frac{n-1}{2}$ intervalles de cardinal $n - c_0 \log n \log \log n$ chacun.*

Preuve. Nous allons suivre à peu près la même stratégie que pour le théorème 1.3.2 sauf que nous allons remplacer le système

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ a + b = c + d \end{cases}$$

qui nous permettait de conclure $\{a, b\} = \{c, d\}$ par le système

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ (a+1)^2 + (b+1)^2 = (c+1)^2 + (d+1)^2 \end{cases}$$

qui nous amènera à la même conclusion mais nous permettra d'utiliser une astuce de Cilleruelo (voir [6]) afin d'améliorer le résultat. Elle repose sur le lemme suivant (voir [12]).

Lemme 1.3.5. *Il existe une constante c_0 telle que le plus petit résidu non quadratique (noté n_p) dans le corps à p éléments \mathbb{F}_p est strictement supérieur à $c_0 \log p \log \log p$ pour une infinité de nombres premiers p*

$$n_p > c_0 \log p \log \log p.$$

Soit p un nombre premier pour lequel $n_p > c_0 \log p \log \log p$, \mathbb{F}_p le corps fini à p éléments et ${}^2\mathbb{F}_p$ l'ensemble des carrés de \mathbb{F}_p^* . On rappelle qu'on a $\#{}^2\mathbb{F}_p = \frac{p-1}{2}$ (cf. preuve du théorème 1.3.2). Définissons ${}^2\mathbb{F}_p^c = \mathbb{F}_p^* \setminus {}^2\mathbb{F}_p$. On a donc $\#{}^2\mathbb{F}_p^c = p-1 - \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2}$ et $\min {}^2\mathbb{F}_p^c = n_p > c_0 \log p \log \log p$. Soit ${}^2\mathcal{F}_p$ (respectivement ${}^2\mathcal{F}_p^c$) la projection de ${}^2\mathbb{F}_p$ (respectivement ${}^2\mathbb{F}_p^c$) dans les p premiers entiers. On a donc en particulier $\min {}^2\mathcal{F}_p^c = n_p > c_0 \log p \log \log p$. Enfin pour tout entier k on définit \bar{k} comme le plus petit entier positif congru à k modulo p . On pose

$$S = \left\{ \overline{2(k+1)^2 p + n_p k^2} \mid k = 1, \dots, p-1 \right\}.$$

Quel que soit $k \in \{1, \dots, p-1\}$, $\overline{(k+1)^2}$ appartient à ${}^2\mathcal{F}_p$ et $\overline{n_p k^2}$ appartient à ${}^2\mathcal{F}_p^c$ donc

$$S \subset \bigsqcup_{i \in {}^2\mathcal{F}_p} \llbracket 2ip + n_p, 2ip + p - 1 \rrbracket,$$

et donc S est de cardinal p et est inclus dans une union de $\frac{p-1}{2}$ intervalles de cardinal $p - n_p$. Il ne reste donc qu'à prouver que S est un ensemble de Sidon. Or si $\overline{2(a+1)^2 p + n_p a^2}$, $\overline{2(b+1)^2 p + n_p b^2}$, $\overline{2(c+1)^2 p + n_p c^2}$ et $\overline{2(d+1)^2 p + n_p d^2}$ sont des éléments de S tels que

$$\overline{2(a+1)^2 p + n_p a^2} + \overline{2(b+1)^2 p + n_p b^2} = \overline{2(c+1)^2 p + n_p c^2} + \overline{2(d+1)^2 p + n_p d^2},$$

alors on a

$$2p\left(\overline{(a+1)^2} + \overline{(b+1)^2} - \overline{(c+1)^2} - \overline{(d+1)^2}\right) + \left(\overline{n_p a^2} + \overline{n_p b^2} - \overline{n_p c^2} - \overline{n_p d^2}\right) = 0.$$

Comme $\overline{n_p a^2} + \overline{n_p b^2} - \overline{n_p c^2} - \overline{n_p d^2} < 2p$, cette égalité équivaut au système dans \mathbb{F}_p suivant

$$\begin{cases} n_p a^2 + n_p b^2 = n_p c^2 + n_p d^2 \\ (a+1)^2 + (b+1)^2 = (c+1)^2 + (d+1)^2 \end{cases} .$$

Or en simplifiant la première ligne par n_p puis en soustrayant la première ligne à la deuxième, on obtient

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ (a+1)^2 + (b+1)^2 = (c+1)^2 + (d+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ a + b = c + d \end{cases} .$$

On a vu que ce système impliquait $\{a, b\} = \{c, d\}$ (cf. preuve du théorème 1.3.2). Donc S est bien un ensemble de Sidon. \square

Malheureusement ce théorème 1.3.4 ne permet pas d'améliorer notre précédente minoration

$$F(\mathcal{A}_{\sqrt{2}}) \gtrsim \sqrt{2}\sqrt{kn},$$

fournie par le théorème 1.3.2.

Ces résultats donnent donc des minoration du cardinal du plus gros ensemble de Sidon contenu dans divers ensembles d'entiers. Revenons à l'intervalle. Comme évoqué dans l'introduction, on sait que $F(\llbracket 1, n \rrbracket)$ est équivalent à \sqrt{n} mais on ne sait pas grand chose sur $F(\llbracket 1, n \rrbracket) - \sqrt{n}$. Cilleruelo a tout de même fait une avancée en dimension 2, ce qui a motivé nos travaux de la prochaine partie.

Chapitre 2

Ensembles de Sidon et $B_2[2]$ dans

$\llbracket 1, n \rrbracket^d$ où $d \geq 3$

Grâce aux travaux notamment de Bose [2], Bose et Chowla [3], Chowla [5], Ruzsa [28], Erdős et Turán [11], et Singer [31], il est désormais bien connu que $F(\llbracket 1, n \rrbracket) \sim \sqrt{n}$. Mais que peut-on dire de $F(\llbracket 1, n \rrbracket) - \sqrt{n}$? On pense que la quantité $F(\llbracket 1, n \rrbracket) - \sqrt{n}$ est non majorée (cf. [6]). Ce qui nous amène à formuler la conjecture suivante.

Conjecture 2.0.1. *Pour tout $M > 0$, et une infinité d'entiers n , on a*

$$F(\llbracket 1, n \rrbracket) \geq \sqrt{n} + M.$$

Aucun progrès n'a été fait sur cette conjecture mais Cilleruelo [6] a fait une avancée en dimension supérieure. En effet, il est également connu que

$$F(\llbracket 1, n \rrbracket^d) \sim n^{d/2}. \quad (2.0.1)$$

Pour plus de lisibilité, nous noterons parfois $F(\llbracket 1, n \rrbracket^d)$ simplement $F_d(n)$.

La minoration est triviale en partant d'un gros ensemble de Sidon dans $\llbracket 1, n^d \rrbracket$ et en le plongeant dans $\llbracket 1, n \rrbracket^d$ par son écriture en base n (cf. la preuve du lemme 2.3.4 plus loin). La majoration, elle, découle des travaux de Lindström [24] qui donnent

$$F_d(n) < n^{d/2} + O\left(n^{d^2/(2d+2)}\right),$$

en adaptant l'approche de Erdős-Turán pour la dimension 1. Ainsi, la conjecture 2.0.1 se généralise aux dimensions supérieures.

Conjecture 2.0.2. *Pour $d \geq 1$, tout $M > 0$, et une infinité d'entiers n , on a*

$$F_d(n) \geq n^{d/2} + M.$$

De son côté, Cilleruelo [6] démontre le théorème suivant¹

Théorème 2.0.3 (Cilleruelo). *Pour une infinité d'entiers n , on a*

$$F_2(n) > n + \log n \log \log \log n.$$

Ce qui prouve la conjecture pour $d = 2$. Nous avons essayé de travailler sur les dimensions supérieures mais n'avons pas abouti. Voici quelques pistes de nos recherches.

¹Nous remercions ici Pablo Candela de nous avoir signalé cet article et soumis un problème relatif.

2.1 Tentatives et résultats partiels pour $d = 4$

Cilleruelo prouve précisément dans [6] que pour tout nombre premier p , on a

$$F_2(p - n_p + 1) \geq p,$$

où n_p est le plus petit résidu non quadratique modulo p . Pour cela, il introduit l'ensemble $\{(n_p k^2, n_p (k+1)^2) \mid k \in \{1, \dots, p\}\}$. Il montre que c'est un ensemble de Sidon dans $\llbracket n_p, p \rrbracket^2$ et n'a donc qu'à le translater pour aboutir à son résultat. En effet, on a déjà vu dans la partie précédente qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour une infinité de nombres premiers p on a l'inégalité $n_p \geq c_0 \log p \log_3 p$.

Soit \mathbb{P}_0 l'ensemble de ces nombres premiers. Pour $d = 4$, on voudrait utiliser la même approche que celle développée par Cilleruelo en introduisant le sous-ensemble de \mathbb{Z}_p^4

$$A_p = \{(n_p P_1^2(k_1, k_2), n_p P_2^2(k_1, k_2), n_p P_3^2(k_1, k_2), n_p P_4^2(k_1, k_2)) \mid k_1, k_2 \in \{1, \dots, p\}\},$$

où P_1, P_2, P_3 , et P_4 sont des polynômes à valeurs dans \mathbb{Z}_p . Comme toutes les coordonnées non nulles $n_p P_i^2(k_1, k_2)$ sont des résidus non quadratiques, il est possible de projeter A_p dans $\llbracket n_p, p \rrbracket^4$ (en projetant 0 sur p). Ainsi si nous pouvons trouver de tels polynômes qui rendent A_p de Sidon et tels que $\#A_p = p^2$, alors en projetant A_p dans $\llbracket n_p, p \rrbracket^4$ et en le translantant par $-(n_p - 1, n_p - 1, n_p - 1, n_p - 1)$, on obtiendrait un ensemble de Sidon dans $\llbracket 1, p - n_p + 1 \rrbracket^4$ de cardinal $\#A_p$ et donc nous aurions

$$F_4(p - n_p + 1) \geq \#A_p = p^2.$$

Ce qui prouverait la conjecture 2.0.2 pour $d = 4$.

Nous avons quelques pistes pour ces polynômes. Tout d'abord, ils doivent être de degré minimal car plus leur degré sera élevé et plus petite sera leur image (par le théorème de l'isomorphisme). Or pour obtenir un ensemble de Sidon, il est préférable qu'on ait un large choix pour chaque coordonnée.

De plus, il est nécessaire qu'au moins l'un de ces polynômes contienne les deux variables pour éviter que A_p soit simplement un produit cartésien d'ensembles de Sidon qui n'aurait alors aucune chance d'être lui-même un ensemble de Sidon. En effet, si S et S' sont deux ensembles de Sidon, on a toujours

$$(s_1, s'_1) + (s_2, s'_2) = (s_1, s'_2) + (s_2, s'_1),$$

pour $s_1, s_2 \in S$ et $s'_1, s'_2 \in S'$. Donc $S \times S'$ n'est pas un ensemble de Sidon.

Aussi, deux de ces polynômes ne peuvent dépendre tous deux d'une seule même variable. Effectivement, si P_1 et P_2 ne dépendent tous deux que de k_1 , on a

$$A_p = \bigsqcup_{k_1=1}^p \{n_p P_1^2(k_1)\} \times \{n_p P_2^2(k_1)\} \times B(k_1),$$

où $B(k_1)$ est l'ensemble

$$\{(n_p P_3^2(k_1, k_2), n_p P_4^2(k_1, k_2)) \mid (n_p P_1^2(k_1), n_p P_2^2(k_1), n_p P_3^2(k_1, k_2), n_p P_4^2(k_1, k_2)) \in A_p\}.$$

Pour plus de clarté, on note

$$\phi(k_1) = (n_p P_1^2(k_1), n_p P_2^2(k_1)).$$

On a

$$|A_p| = \sum_{k_1=1}^p |B(k_1)|,$$

et par le principe d'inclusion-exclusion

$$\sum_{k_1=1}^p |B(k_1)| \leq \left| \bigcup_{k_1=1}^p B(k_1) \right| + \sum_{\substack{k_1, k'_1=1 \\ k_1 \neq k'_1}}^p |B(k_1) \cap B(k'_1)|.$$

Mais A_p étant un ensemble de Sidon $|B(k_1) \cap B(k'_1)| \leq 1$ pour tous k_1, k'_1 . Sinon il existerait deux éléments différents K et K' dans $B(k_1) \cap B(k'_1)$ et A_p contiendrait les quatre éléments $\phi(k_1) \times K$, $\phi(k_1) \times K'$, $\phi(k'_1) \times K$, $\phi(k'_1) \times K'$, or

$$\phi(k_1) \times K + \phi(k'_1) \times K' = \phi(k'_1) \times K + \phi(k_1) \times K',$$

ce qui contredit que A_p est un ensemble de Sidon. On a donc bien $|B(k_1) \cap B(k'_1)| \leq 1$ pour tous k_1, k'_1 , et comme il y a $\frac{p+1}{2}$ carrés dans \mathbb{F}_p , on a

$$|A_p| \leq \left| \bigcup_{k_1=1}^p B(k_1) \right| + \sum_{\substack{k_1, k'_1=1 \\ k_1 \neq k'_1}}^p |B(k_1) \cap B(k'_1)| \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \binom{p}{2} \lesssim \frac{3p^2}{4},$$

ce qui est trop petit. Donc finalement, deux des quatre polynômes ne peuvent dépendre de la même unique variable, ce qui implique qu'au moins deux de ces polynômes dépendent des deux variables.

Enfin, il faut faire attention à ne pas pouvoir se ramener aux précédentes interdictions par simple changement de variables inversible. Par exemple l'ensemble

$$\left\{ \left((u+v)^2, (u+v+1)^2, (u-v)^2, (u-v+1)^2 \right) \mid u, v \in \mathbb{F}_p \right\},$$

est égal, par changement de variables, à l'ensemble

$$\left\{ \left(k_1^2, (k_1+1)^2, k_2^2, (k_2+1)^2 \right) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{F}_p \right\},$$

qui est le produit cartésien de deux ensembles de Sidon

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(k_1^2, (k_1+1)^2, k_2^2, (k_2+1)^2 \right) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{F}_p \right\} \\ &= \left\{ \left(k^2, (k+1)^2 \right) \mid k \in \mathbb{F}_p \right\} \times \left\{ \left(k^2, (k+1)^2 \right) \mid k \in \mathbb{F}_p \right\}. \end{aligned}$$

(cf. la preuve du théorème 1.3.4 pour voir que ce sont bien des ensembles de Sidon).

Malheureusement, nous ne parvenons pas à trouver de tels polynômes et nous pensons même qu'en fait ils n'existent pas. Nous nous sommes alors demandés si on ne pouvait pas tout de même s'approcher d'un ensemble de Sidon de cette manière puis enlever certains éléments afin d'obtenir réellement un ensemble de Sidon. Par exemple,

on pourrait compter le nombre de mauvais quadruplets (a, b, c, d) tels que $a + d = c + b$ et $\{a, d\} \neq \{c, b\}$ et ôter un élément pour chacun d'entre eux. Pour obtenir un résultat nouveau, il faudrait alors que le nombre de ces mauvais quadruplets soit inférieur à $p \log p$. Nous avons écrit un programme qui les compte (pour des petits nombres premiers p) mais cette quantité semble beaucoup trop élevée. La meilleure configuration que nous avons trouvée est obtenue avec les polynômes $P_1(k_1, k_2) = \overline{k_1}$, $P_2(k_1, k_2) = \overline{k_2} + 1$, $P_3(k_1, k_2) = \overline{k_1} + \overline{k_2}$ et $P_4(k_1, k_2) = \overline{k_1} - \overline{k_2}$ qui donnent 2830 mauvais quadruplets pour $p = 7$, ce qui est beaucoup trop élevé par rapport à $7 \log 7$.

Une autre piste, serait de ne pas prendre toutes les coordonnées parmi les carrés de \mathbb{F}_p . En effet, ce n'est pas nécessaire et pour que le résultat fonctionne, il suffit que les coordonnées soient toutes supérieures à n_p . Ainsi un ensemble du type

$$A'_p = \left\{ \left(\overline{k_1}, n_p P_1^2(k_1, k_2), n_p P_2^2(k_1, k_2), n_p P_3^2(k_1, k_2) \right) \mid k_1 \in \{n_p, \dots, p\}, k_2 \in \{1, \dots, p\} \right\},$$

peut tout à fait servir la stratégie. On aurait

$$F_4(p - n_p + 1) \geq p(p - n_p),$$

donc si $m = p - n_p + 1$

$$F_4(m) \geq m^2 + pn_p - n_p^2 \geq m^2 + m \log m + o(m),$$

ce qui prouverait également la conjecture 2.0.2 pour $d = 4$. Mais encore une fois, nous ne sommes pas parvenus à trouver de polynômes rendant A'_p de Sidon.

2.2 Tentatives et résultats partiels pour $d = 3$

En dimension 3, on pourrait essayer d'utiliser le même genre d'idée qu'en dimension 2 ou 4 mais si nous ne considérons qu'une seule variable (dans les polynômes définissant notre ensemble) alors le cardinal de notre ensemble sera trop petit. Si nous en considérons deux alors le fait que nous n'ayons que trois équations nous empêche de résoudre le système découlant de l'équation de Sidon. Nous n'aurons donc aucune chance de créer un ensemble de Sidon.

Une idée serait de bel et bien considérer deux variables mais où l'une des deux ne vit que dans un ensemble de Sidon de \mathbb{F}_p . Par exemple, considérons S un ensemble de Sidon de cardinal maximal dans $\llbracket n_p, p \rrbracket$. S'il existe deux polynômes P_1 et P_2 à valeur dans \mathbb{Z}_p tels que

$$A_p = \left\{ \left(\overline{k_1}, n_p P_1^2(k_1, k_2), n_p P_2^2(k_1, k_2) \right) \mid k_1 \in S, k_2 \in \{1, \dots, p\} \right\}$$

est un ensemble de Sidon, on aurait

$$F_3(p - n_p + 1) \geq p\sqrt{p - n_p}.$$

Et donc si on pose $m = p - n_p + 1$, on obtiendrait

$$F_3(m) \geq m^{3/2} + \sqrt{m} \log m + o(\sqrt{m}),$$

ce qui prouverait la conjecture 2.0.2 pour $d = 3$. Malheureusement, encore une fois, nous ne parvenons pas à trouver de tels polynômes.

Voici un exemple s'en approchant car il permet d'obtenir tout de même un ensemble $B_2[2]$ dans $\llbracket 1, p - n_p + 1 \rrbracket^3$. On choisit $P_1(k_1, k_2) = \overline{k_1} + \overline{k_2}$ et $P_2(k_1, k_2) = \overline{k_1} + \overline{k_2} + 1$. Pour prouver qu'alors $A_p \in B_2[2]$, il suffit de voir que A_p n'admet qu'au plus deux solutions (en u et v) à l'équation $u + v = (\alpha, \beta, \gamma)$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \llbracket n_p, p \rrbracket$. C'est ce que nous allons vérifier. Soient donc $u, v \in A_p$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \llbracket n_p, p \rrbracket$ tels que $u + v = (\alpha, \beta, \gamma)$. Écrivons $u = (u_1, n_p(u_1 + u_2)^2, n_p(u_1 + u_2 + 1)^2)$ et $v = (v_1, n_p(v_1 + v_2)^2, n_p(v_1 + v_2 + 1)^2)$ où u_1 et v_1 appartiennent tous deux à un certain ensemble de Sidon S . $u + v = (\alpha, \beta, \gamma)$ implique alors le système d'équations dans \mathbb{Z}_p suivant

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = \alpha \\ (u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2 = \beta n_p^{-1} \\ (u_1 + u_2 + 1)^2 + (v_1 + v_2 + 1)^2 = \gamma n_p^{-1} \end{cases} .$$

En soustrayant la deuxième équation à la troisième, on obtient

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = \alpha \\ u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = (\beta - \gamma - 2)(2n_p)^{-1} \\ (u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2 = \beta n_p^{-1} \end{cases} .$$

La première équation de ce système détermine $\{u_1, v_1\}$ car u_1 et v_1 appartiennent tous deux au même ensemble de Sidon \overline{S} . Il existe donc a_1 et a_2 dans \mathbb{Z}_p tels que $\{u_1, v_1\} = \{a_1, a_2\}$.

- Supposons que $u_1 = a_1$ et $v_1 = a_2$. En injectant la seconde équation dans la troisième, nous obtenons une équation du second degré en u_2 . Il y a donc au plus deux solutions (que nous noterons b_1 et b_2) pour u_2 et chacune détermine automatiquement v_2 (par la deuxième équation). Ainsi il existe $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_p$ tels que

$$(u_2, v_2) \in \{(b_1, c_1), (b_2, c_2)\} .$$

Ce qui nous fournit deux solutions. Soit

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (a_1, n_p(a_1 + b_1)^2, n_p(a_1 + b_1 + 1)^2) + (a_2, n_p(a_2 + c_1)^2, n_p(a_2 + c_1 + 1)^2),$$

soit

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (a_1, n_p(a_1 + b_2)^2, n_p(a_1 + b_2 + 1)^2) + (a_2, n_p(a_2 + c_2)^2, n_p(a_2 + c_2 + 1)^2).$$

- Supposons maintenant que $u_1 = a_2$ et $v_1 = a_1$. Comme les équations de notre système sont symétriques en $u_1 + u_2$ et $v_1 + v_2$, nécessairement

$$(u_2, v_2) \in \{(c_1, b_1), (c_2, b_2)\} .$$

Par commutativité de la somme, nous retombons donc bien sur les deux solutions trouvées dans l'autre cas.

Finalement il n'y a donc bien qu'au plus deux manières d'écrire (α, β, γ) comme somme de deux éléments de A_p et donc $A_p \in B_2[2]$.

Nos généralisations ne nous permettent donc pas d'améliorer les bornes connues mais nous obtenons tout de même une construction d'un ensemble $B_2[2]$ en dimension 3. Dans la prochaine partie, nous verrons que ce résultat n'a qu'un intérêt théorique car il est possible de faire beaucoup mieux en construisant des ensembles $B_2[2]$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket^d$ à partir de $B_2[2]$ dans $\llbracket 1, n^d \rrbracket$.

2.3 Construction de $B_2[g]$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket^d$ où $d \geq 2$

Nous avons vu dans les parties précédentes que

$$F_d(n) \sim n^{d/2},$$

où

$$F_d(n) = F(\llbracket 1, n \rrbracket^d) = \max \{ \#S \mid S \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket^d, S \text{ est de Sidon} \}.$$

En particulier

$$F(n) \sim \sqrt{n}. \quad (2.3.1)$$

Posons désormais

$$F_d^{[g]}(n) = F(\llbracket 1, n \rrbracket^d)[g] = \max \{ \#A \mid A \in B_2[g](\llbracket 1, n \rrbracket^d) \}.$$

Nous avons vu dans la partie 1.2 que les travaux de Cilleruelo, Ruzsa et Trujillo [8] impliquent

$$F_1^{[g]}(n) \geq \lambda_g \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \quad (2.3.2)$$

où $\lambda_g = \frac{g + \lfloor g/2 \rfloor}{\sqrt{g + 2 \lfloor g/2 \rfloor}}$ pour tout $g \geq 2$. De plus, pour $g = 2$ la borne a été améliorée par Habsieger et Plagne [13] qui établissent

$$F_1^{[2]}(n) \geq 1,5119\sqrt{n}. \quad (2.3.3)$$

Qu'en est-il des dimensions supérieures ? Que peut-on dire sur $F_d^{[g]}(n)$? Commençons par établir le lemme élémentaire suivant.

Lemme 2.3.1. *Soient E_1 et E_2 deux semi-groupes, g_1 et g_2 deux entiers non nuls, $A_1 \in B_2[g_1](E_1)$ et $A_2 \in B_2[g_2](E_2)$. Alors le produit cartésien $A_1 \times A_2$ appartient à $B_2[2g_1g_2](E_1 \times E_2)$.*

Preuve. Soient $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2) \in A_1 \times A_2$. Nous allons regarder le nombre de solutions en $\{(a_1, a_2), (a'_1, a'_2)\}$ à l'équation

$$(s_1, s_2) + (s'_1, s'_2) = (a_1, a_2) + (a'_1, a'_2). \quad (2.3.4)$$

Cette équation équivaut au système

$$\begin{cases} s_1 + s'_1 = a_1 + a'_1 \\ s_2 + s'_2 = a_2 + a'_2 \end{cases}.$$

Comme $A_1 \in B_2[g_1](E_1)$, il n'y a qu'au plus g_1 façons d'écrire $a_1 + a'_1$ comme somme de deux éléments de A_1 . Ainsi nous n'avons qu'au plus g_1 choix pour $\{s_1, s'_1\}$. Nous n'avons donc qu'au plus $2g_1$ choix pour (s_1, s'_1) . De même, nous n'avons qu'au plus $2g_2$ choix pour (s_2, s'_2) . Il suit que nous n'avons qu'au plus $4g_1g_2$ choix pour (s_1, s'_1, s_2, s'_2) . Cependant à s_1, s'_1, s_2, s'_2 fixés, (s_1, s'_1, s_2, s'_2) fournit la même solution que (s'_1, s_1, s'_2, s_2) par commutativité de la somme. Finalement $A_1 \times A_2 \in B_2[2g_1g_2](E_1 \times E_2)$. \square

En particulier, ce lemme conduit immédiatement au corollaire suivant.

Corollaire 2.3.2. *Soient S_1 et S_2 des ensembles de Sidon dans deux semi-groupes abéliens respectivement G_1 et G_2 . Alors leur produit cartésien $S_1 \times S_2$ appartient à $B_2[2]$ ($G_1 \times G_2$).*

Le lemme 2.3.1 nous fournit donc une première manière de construire des ensembles $B_2[g]$ en dimensions supérieures. Par exemple en utilisant (2.3.1) et (2.3.3), le lemme donne la borne

$$F_2^{[4]}(n) \gtrsim 1,5119n.$$

Nous allons en fait établir un résultat plus puissant (le théorème 2.3.3 ci-après) qui nous fournira par exemple la minoration

$$F_2^{[4]}(n) \gtrsim \frac{3}{\sqrt{2}}n \geq 2,12n.$$

Théorème 2.3.3 (théorème I). *Soit n, d et g des entiers positifs tels que $g \geq 3$ et $d \geq 2$.*

Posons $\lambda_g = \frac{g + \lfloor g/2 \rfloor}{\sqrt{g + 2 \lfloor g/2 \rfloor}}$. On a

$$F_d^{[2]}(n) \gtrsim 1,5119n,$$

et, si $g \geq 3$,

$$F_d^{[g]}(n) \gtrsim \lambda_g n^{d/2}.$$

Nous allons, en fait, démontrer le résultat un peu plus général suivant.

Lemme 2.3.4. *Soient n_1, \dots, n_d des entiers et $A \in B_2[g]$ ($\llbracket 1, n_1 \dots n_d \rrbracket$), alors il existe $\tilde{A} \in B_2[g]$ ($\llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n_d \rrbracket$) tel que $\#\tilde{A} = \#A$.*

Preuve. Si $a \in \mathbb{N}$, on écrit alors a en base n_1, \dots, n_d

$$a = \sum_{k=1}^d \delta_k N_k,$$

où $N_k = n_1 \dots n_k$ et où δ_k est un entier tel que $0 \leq \delta_k \leq n_k - 1$. Considérons l'application ϕ qui envoie tout entier a sur le d -uplet de ses coordonnées en base n_1, \dots, n_d .

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{N} &\longrightarrow \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n_d \rrbracket \\ a = \sum_{k=1}^d \delta_k N_k &\longmapsto (\delta_1, \dots, \delta_d) + (1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Soit $A \in B_2[g]$ ($\llbracket 1, n_1 \dots n_d \rrbracket$), comme ϕ est une bijection sur A , on a $\#\phi(A) = \#A$. Il suffit donc de poser $\tilde{A} = \phi(A)$ et de vérifier que $\phi(A) \in B_2[g]$ ($\llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n_d \rrbracket$) afin de prouver le lemme. Nous allons raisonner par l'absurde.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ appartenant à $\llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n_d \rrbracket$ tel que α s'écrive de $g + 1$ façons différentes comme somme de deux éléments de $\phi(A)$. On suppose donc qu'il existe $2(g + 1)$ éléments distincts $\delta^{(1)}, \dots, \delta^{(g+1)}, \delta'^{(1)}, \dots, \delta'^{(g+1)}$ de $\phi(A)$ tels que

$$\alpha = \delta^{(1)} + \delta'^{(1)} = \dots = \delta^{(g+1)} + \delta'^{(g+1)}.$$

On écrit $\delta^{(k)} = (\delta_1^{(k)}, \dots, \delta_g^{(k)})$ et $\delta'^{(k)} = (\delta_1'^{(k)}, \dots, \delta_g'^{(k)})$ pour tout $k = 1, \dots, g + 1$. Ainsi pour tout $k = 1, \dots, g + 1$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = (\delta_1^{(k)}, \dots, \delta_g^{(k)}) + (\delta_1'^{(k)}, \dots, \delta_g'^{(k)}),$$

et donc

$$\sum_{l=1}^d \alpha_l N_l = \sum_{l=1}^d \delta_l^{(k)} N_l + \sum_{l=1}^d \delta_l'^{(k)} N_l.$$

Or les deux sommes du membre de droite sont des éléments de A , ensemble qui appartient à $B_2[g] (\llbracket 1, n_1 \dots n_d \rrbracket)$, il ne peut donc, par définition des ensembles $B_2[g]$, n'y avoir que g façons d'écrire $\sum_{l=1}^d \alpha_l N_l$ comme somme de deux éléments de A . Comme nous avons $g + 1$ égalités

$$\sum_{l=1}^d \alpha_l N_l = \sum_{l=1}^d \delta_l^{(k)} N_l + \sum_{l=1}^d \delta_l'^{(k)} N_l,$$

nécessairement, il existe k et k' tels que

$$\left\{ \sum_{l=1}^d \delta_l^{(k)} N_l, \sum_{l=1}^d \delta_l'^{(k)} N_l \right\} = \left\{ \sum_{l=1}^d \delta_l^{(k')} N_l, \sum_{l=1}^d \delta_l'^{(k')} N_l \right\},$$

et par unicité de l'écriture en base n_1, \dots, n_d

$$\left\{ (\delta_1^{(k)}, \dots, \delta_g^{(k)}), (\delta_1'^{(k)}, \dots, \delta_g'^{(k)}) \right\} = \left\{ (\delta_1^{(k')}, \dots, \delta_g^{(k')}), (\delta_1'^{(k')}, \dots, \delta_g'^{(k')}) \right\},$$

d'où finalement

$$\{\delta^{(k)}, \delta'^{(k)}\} = \{\delta^{(k')}, \delta'^{(k')}\},$$

ce qui contredit le fait qu'on ait supposé $\delta^{(k)}, \delta'^{(k)}, \delta^{(k')}$ et $\delta'^{(k')}$ distincts. On obtient donc une absurdité et donc nécessairement, $\phi(A) \in B_2[g] (\llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n_d \rrbracket)$, ce qui termine la preuve de ce lemme. \square

Le théorème 2.3.3 est un simple corollaire de ce lemme en prenant $n = n_1 = \dots = n_d$ et en considérant les minoration (2.3.2) et (2.3.3).

Chapitre 3

Ensembles infinis de Sidon de grande densité dans les entiers naturels

La question des ensembles de Sidon infinis de grande densité dans les entiers a également beaucoup été étudiée. Il est bien connu que le cardinal maximal d'un ensemble de Sidon dans les n premiers entiers est équivalent à \sqrt{n} mais peut-on, pour autant, trouver un ensemble infini de Sidon de densité \sqrt{n} dans les entiers ? C'est à dire, existe-t-il un ensemble infini de Sidon S tel que

$$\#(S \cap \llbracket 1, n \rrbracket) \sim \sqrt{n} ?$$

Erdős a répondu à cette question par la négative (cf. [32] p.133) en montrant que si S est un ensemble infini de Sidon dans les entiers, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{\sqrt{n/\log(n)}} \ll 1 \quad (3.0.1)$$

où $S(n) = \#(S \cap \llbracket 1, n \rrbracket)$. En revanche, Erdős [32] prouve également qu'il existe un ensemble infini de Sidon S tel que

$$\limsup \frac{S(n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2},$$

ce qui fut amélioré par Krückeberg [21] qui démontre qu'il existe un ensemble infini de Sidon S tel que

$$\limsup \frac{S(n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ces résultats nous laissent penser que l'asymptotique ne doit pas être loin de \sqrt{n} et nous amènent donc à considérer la conjecture suivante.

Conjecture 3.0.1. *Il existe un ensemble (infini) de Sidon S dans \mathbb{N} tel que quel que soit $\varepsilon > 0$, on a*

$$S(n) \gg n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Cette conjecture a été émise la première fois par Erdős [10] mais le problème est toujours ouvert actuellement. Les premiers résultats dans cette direction viennent de

Mian et Chowla [25] qui prouvent, par un raisonnement combinatoire, qu'il existe un ensemble infini de Sidon $S = \{s_n\}$ tel que $s_n \ll n^3$, c'est à dire $S(n) \gg n^{1/3}$. Il suffit de construire les éléments s_n les uns après les autres en remarquant que $\mathcal{S}_{n+1} = \{s_i + s_j - s_k \mid 1 \leq i, i, k \leq n\}$ n'a un cardinal au plus n^3 , et donc qu'il est possible de choisir $s_{n+1} < (n+1)^3$ tel que $s_{n+1} \notin \mathcal{S}_{n+1}$.

Ce résultat est longtemps resté le meilleur connu mais en 1998, Ruzsa [29] montre l'existence d'un ensemble infini de Sidon S dans les entiers tel que $S(n) = n^{\sqrt{2}-1+o(1)}$ pour n assez grand.

C'est encore aujourd'hui le meilleur résultat que nous connaissons et si on pose

$$\alpha = \sup \left\{ \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\log A(N)}{\log N} \mid A \subseteq \mathbb{N}^*, A \text{ est de Sidon} \right\},$$

alors nous savons, grâce à lui, que $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. Cilleruelo a réussi [7] à prouver le même résultat mais de manière déterministe alors que la preuve de Ruzsa comporte des arguments probabilistes pour déterminer l'existence d'un certain paramètre. C'est l'unique amélioration connue à ce jour. Personne n'a encore réussi à améliorer cette borne et pour cause, la construction d'ensembles de Sidon infinis est très difficile. Nous proposons dans cette partie un résultat permettant de ramener le problème à l'étude d'ensembles de Sidon finis. Cela pourrait ouvrir la porte à de nouveaux raisonnements, et peut-être permettre d'améliorer la minoration de Ruzsa et se rapprocher de la conjecture d'Erdős.

Théorème 3.0.2 (théorème J). *L'existence d'un ensemble de Sidon infini A dans \mathbb{N} tel que pour tout entier m $\#(A \cap \llbracket 1, m \rrbracket) \geq m^\beta$ où $\beta \in]0, \frac{1}{2}]$ est équivalente à l'existence d'une sous-suite $(B_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles finis de Sidon tels que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $B_{\psi(n)} \subseteq \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket$ et $\#(B_{\psi(n)} \cap \llbracket 1, m \rrbracket) \geq m^\beta$ pour tout $m \leq \psi(n)$ (où ψ est une application strictement croissante sur \mathbb{N}).*

Preuve.

A) Sens direct :

La première implication est triviale. En effet, si on a un ensemble infini de Sidon $A \subset \mathbb{N}$ de densité supérieure à n^β , alors il suffit de choisir ψ comme l'application identité sur \mathbb{N} et de définir les $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

$$B_n = A \cap \llbracket 0, n \rrbracket .$$

En effet, quel que soit $m \leq n$, on a :

$$\#(B_n \cap \llbracket 1, m \rrbracket) = \#(A \cap \llbracket 1, m \rrbracket),$$

et par définition de A

$$\#(A \cap \llbracket 1, m \rrbracket) \geq m^\beta .$$

Donc finalement

$$\#(B_n \cap \llbracket 1, m \rrbracket) \geq m^\beta.$$

B) Réciproque :

Supposons qu'il existe une suite $(B_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles finis de Sidon tels que $B_{\psi(n)} \subseteq \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket$ et pour tout $m \leq \psi(n)$, on ait

$$\#(B_{\psi(n)} \cap \llbracket 1, m \rrbracket) \geq m^\beta.$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow [0, 2] \\ P &\longmapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_P(i) 2^{-i} . \end{aligned}$$

La suite $(\phi(B_{\psi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $[0, 2]$ qui est compact, on peut donc extraire une sous-suite convergeant vers un certain élément a appartenant à $[0, 2]$. Ainsi on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(B_{\psi(n_k)}) = a,$$

où les n_k sont des entiers tels que

$$0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots$$

On rappelle que tout élément de $[0, 2]$ n'admet qu'au plus deux écritures en base 2. Il suit par contraposée que $\phi^{-1}(a)$ ne contient qu'un ou deux éléments suivant le nombre d'écritures que possède a en base 2.

- Si a ne possède qu'une unique écriture en base 2, alors a a un nombre infini de décimales non nulles et donc $\phi^{-1}(a)$ contient un unique ensemble infini.
- Si a possède deux écritures en base 2, alors l'une de ces deux écritures a toutes ses décimales nulles à partir d'un certain rang et l'autre a toutes ses décimales égales à 1 à partir d'un certain rang. Nous allons voir qu'aucune de ces deux configurations n'est possible.

Si a a toutes ses décimales égales à 1 par partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, alors par construction de ϕ , quel que soit $\psi(n_k) > N$, $\llbracket N, \psi(n_k) \rrbracket \subseteq B_{\psi(n_k)}$, ce qui contredit le fait que $B_{\psi(n_k)}$ est de Sidon. Inversement si a a toutes ses décimales nulles par partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, alors par construction de ϕ , quel que soit $\psi(n_k) > N$, $\llbracket N, \psi(n_k) \rrbracket \cap B_{\psi(n_k)} = \emptyset$, ce qui implique $\#B_{\psi(n_k)} \leq N$ et donc contredit l'hypothèse $\#B_{\psi(n_k)} \geq \psi(n_k)^\beta$ (car $\beta > 0$).

Finalement $\phi^{-1}(a)$ contient un unique ensemble infini. Soit donc A l'ensemble infini de $\phi^{-1}(a)$. Commençons par prouver que A est un ensemble de Sidon. Soient $x, y, z, t \in A$ tels que $x < z \leq t < y$ et $x + y = z + t$. On a $(\phi(B_{\psi(n_k)}))$ converge vers $a = \phi(A)$, donc

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_{\psi(n_k)}}(i) 2^{-i} = \phi(B_{\psi(n_k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \phi(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_A(i) 2^{-i}.$$

Ainsi, par définition de la limite, il existe $N_y \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_{N_y}}(i) 2^{-i} - \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_A(i) 2^{-i} \right| < 2^{-t-1},$$

et donc $\sum_{n=0}^{t+1} \mathbb{1}_{B_{N_y}}(n) 2^{-n} = \sum_{n=0}^{t+1} \mathbb{1}_A(n) 2^{-n}$. D'où

$$\begin{cases} \mathbb{1}_{B_{\psi(n_k)}}(x) = \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ \mathbb{1}_{B_{\psi(n_k)}}(y) = \mathbb{1}_A(y) = 1 \\ \mathbb{1}_{B_{\psi(n_k)}}(z) = \mathbb{1}_A(z) = 1 \\ \mathbb{1}_{B_{\psi(n_k)}}(t) = \mathbb{1}_A(t) = 1 \end{cases},$$

et finalement x, y, z et t appartiennent également à B_{N_y} qui est un ensemble de Sidon, ce qui implique $\{x, y\} = \{z, t\}$ et donc A est un ensemble de Sidon.

Il ne reste plus qu'à vérifier que A a la bonne densité. Soit $m \in \mathbb{N}$, encore une fois, par définition de la convergence, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i=0}^m \mathbb{1}_{B_{N'}}(i) 2^{-i} = \sum_{i=0}^m \mathbb{1}_A(i) 2^{-i}.$$

Ce qui implique $\#(A \cap \llbracket 0, m \rrbracket) = \#(B_{N'} \cap \llbracket 0, m \rrbracket) \geq m^\beta$, par hypothèse sur les $(B_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi finalement, A est bien un ensemble infini de Sidon avec la bonne densité, ce qui finit de prouver l'équivalence et donc le théorème. \square

Grâce à ce théorème, construire un ensemble infini de Sidon de bonne densité dans les entiers revient à construire un ensemble fini de Sidon dans les n premiers entiers, avec les bonnes troncatures, où n est aussi grand qu'on veut. Il suffit donc de trouver une suite strictement croissante d'entiers (comme les nombres premiers, les nombres projectifs $p^2 + p + 1, \dots$) pour lesquels on arrive à construire un ensemble de Sidon avec les bonnes troncatures dans les entiers qui leur sont inférieurs. L'intérêt de ce résultat réside essentiellement dans le fait que la structure de ces ensembles peut dépendre de leur taille, ce qui est très utile. Par exemple, toutes les constructions connues actuellement d'ensembles de Sidon en \sqrt{n} dans les n premiers entiers reposent sur des congruences (ou plus généralement sur des projections dans des corps finis), qui ont des comportements très différents d'un entier à l'autre. La projection sur \mathbb{F}_p est très différente de celle sur $\mathbb{F}_{p'}$ si p et p' sont deux nombres premiers distincts. Chacune de ces fameuses constructions donne donc un ensemble de Sidon dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ très différent de celui qu'elle donne dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ (si n et m sont deux entiers suffisamment éloignés). C'est notamment ce qui empêche d'en extraire une quelconque structure commune afin d'obtenir un ensemble infini de Sidon.

Nous pouvons d'ailleurs remarquer que la majoration d'Erdős (3.0.1) et le théorème 3.0.2 prouvent que toutes ces constructions d'ensembles de Sidon en \sqrt{n} dans les n premiers entiers fournissent des ensembles qui n'ont pas les bonnes troncatures.

Il existe déjà des résultats en ce sens (voir les travaux de Kolountzakis [19]), qui impliquent qu'il y a une certaine uniformité dans la répartition des éléments d'un ensemble de Sidon de cardinal en \sqrt{n} dans les n premiers entiers. Tout cela implique que les

constructions que nous connaissons pour obtenir de gros ensembles de Sidon sont assez éloignées de la structure d'ensembles avec les bonnes troncatures que nous cherchons. Partir d'une de ces constructions et "l'appauvrir" afin d'essayer de lui imposer notre structure ne semble donc pas être une bonne piste.

L'ensemble de Sidon infini de Ruzsa ne nous aide pas non plus car Ruzsa construit ses éléments par tranche et donc travaille déjà avec une borne (tout comme la construction de Cilleruelo [7]).

L'idée est de trouver une nouvelle construction, ou un nouvel argument permettant d'assurer l'existence de ces ensembles finis avec la bonne structure afin d'améliorer la borne donnée par Ruzsa $\alpha \geq \sqrt{2} - 1$.

Bibliographie

- [1] H. L. Abbott. Sidon sets. *Canad. Math. Bull.*, 33(3):335–341, 1990.
- [2] R. C. Bose. An affine analogue of Singer’s theorem. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 6:1–15, 1942.
- [3] R. C. Bose and S. Chowla. Theorems in the additive theory of numbers. *Comment. Math. Helv.*, 37:141–147, 1962/1963.
- [4] P. Candela and A. de Roton. On sets with small sumset in the circle. *Q. J. Math.*, 70(1):49–69, 2019.
- [5] S. Chowla. Solution of a problem of Erdős and Turán in additive-number theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. India. Sect. A.*, 14:1–2, 1944.
- [6] J. Cilleruelo. Sidon sets in \mathbb{N}^d . *J. Combin. Theory Ser. A*, 117(7):857–871, 2010.
- [7] J. Cilleruelo. Infinite Sidon sequences. *Adv. Math.*, 255:474–486, 2014.
- [8] J. Cilleruelo, I. Z. Ruzsa, and C. Trujillo. Upper and lower bounds for finite $B_h[g]$ sequences. *J. Number Theory*, 97(1):26–34, 2002.
- [9] A. de Roton. Small sumsets in \mathbb{R} : full continuous $3k - 4$ theorem, critical sets. *J. Éc. polytech. Math.*, 5:177–196, 2018.
- [10] P. Erdős. Problems and results in additive number theory. In *Colloque sur la Théorie des Nombres, Bruxelles, 1955*, pages 127–137. George Thone, Liège; Masson and Cie, Paris, 1956.
- [11] P. Erdős and P. Turán. On a problem of Sidon in additive number theory, and on some related problems. *J. London Math. Soc.*, 16:212–215, 1941.
- [12] S. W. Graham and C. J. Ringrose. Lower bounds for least quadratic nonresidues. In *Analytic number theory (Allerton Park, IL, 1989)*, volume 85 of *Progr. Math.*, pages 269–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [13] L. Habsieger and A. Plagne. Ensembles $B_2[2]$: l’étaiu se resserre. *Integers*, 2:Paper A2, 20, 2002.
- [14] H. Halberstam and K. F. Roth. *Sequences*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1983.

- [15] M. N. Huxley. On the difference between consecutive primes. *Invent. Math.*, 15:164–170, 1972.
- [16] A. E. Ingham. On the difference between consecutive primes. *Quart. J. Math.*, 8:255–266, 1937.
- [17] J. H. B. Kemperman. On products of sets in a locally compact group. *Fund. Math.*, 56:51–68, 1964.
- [18] M. Kneser. Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen. *Math. Z.*, 66:88–110, 1956.
- [19] M. N. Kolountzakis. On the uniform distribution in residue classes of dense sets of integers with distinct sums. *J. Number Theory*, 76(1):147–153, 1999.
- [20] J. Komlós, M. Sulyok, and E. Szemerédi. Linear problems in combinatorial number theory. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 26:113–121, 1975.
- [21] F. Krückeberg. B_2 -Folgen und verwandte Zahlenfolgen. *J. Reine Angew. Math.*, 206:53–60, 1961.
- [22] S. Lang. *Algèbre*. Dunod, 2004.
- [23] B. Lindström. An inequality for B_2 -sequences. *J. Combinatorial Theory*, 6:211–212, 1969.
- [24] B. Lindström. On B_2 -sequences of vectors. *J. Number Theory*, 4:261–265, 1972.
- [25] A. M. Mian and S. Chowla. On the B_2 sequences of Sidon. *Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A*, 14:3–4, 1944.
- [26] D. Raikov. On the addition of point-sets in the sense of Schnirelmann. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 5(47):425–440, 1939.
- [27] I. Z. Ruzsa. Diameter of sets and measure of sumsets. *Monatsh. Math.*, 112(4):323–328, 1991.
- [28] I. Z. Ruzsa. Solving a linear equation in a set of integers. I. *Acta Arith.*, 65(3):259–282, 1993.
- [29] I. Z. Ruzsa. An infinite Sidon sequence. *J. Number Theory*, 68(1):63–71, 1998.
- [30] S. Sidon. Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen. *Math. Ann.*, 106(1):536–539, 1932.
- [31] J. Singer. A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43(3):377–385, 1938.
- [32] A. Stöhr. Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. I, II. *J. Reine Angew. Math.*, 194:40–65, 111–140, 1955.